

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной физики Российской академии наук
(ИПФ РАН)

и

Университет имени Дюка (Duke University)

На правах рукописи

УДК 538.9

Турлапов Андрей Вадимович

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УЛЬТРАХОЛОДНОГО ГАЗА ФЕРМИ-АТОМОВ

01.04.07 — физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород — 2012

Аннотация

Общие свойства ферми-систем исследованы в экспериментах с ферми-газом атомов лития-6 и образованным из него бозе-газом молекул Li_2 . Для достижения вырождения газы приготавливались при температурах от десятков нано- до нескольких микрокельвинов. Результаты экспериментов позволили проверить фундаментальные модели, в том числе, применимые к другим ферми-системам — ядерной материи, высокотемпературным сверхпроводникам, кварк-глюонной плазме. Такие проверки актуальны ввиду сложности квантовых задач многих тел, особенно в режиме сильного взаимодействия, и противоречивости современных теоретических результатов.

Впервые при конечных температурах проверена гипотеза об универсальности системы с резонансно сильными взаимодействиями. Гипотеза позволяет выразить термодинамические константы, в частности температуру перехода к сверхтекучести, через плотность и универсальные безразмерные постоянные, которые не зависят от природы частиц, составляющих систему. Кроме атомного газа, в универсальном режиме может находиться нейтронная материя в нейтронных звездах.

Для сильновзаимодействующего ферми-газа атомов впервые:

- получено непротиворечивое свидетельство сверхтекучести;
- измерена температура и энергия перехода к сверхтекучести, причём, двумя различными способами;
- измерена зависимость энергии от температуры;
- измерена вязкость.

Зависимость энергии от температуры близка к модели, которая изначально сформулирована для высокотемпературных сверхпроводников. С помощью данных о вязкости проверено предсказание теории струн о нижнем пределе отношения вязкости к энтропии.

Распространение звука впервые наблюдалось в ферми-газе атомов и его производной — бозе-эйнштейновском конденсате молекул. На основе прецизионных измерений скорости звука предсказания об уравнении состояния ферми-систем проверены в широком диапазоне значений константы связи, плавная перестройка которой переводит из режима слабого межчастичного притяжения, подчиняющегося теории Бардина–Купера–Шриффера, через область сильных взаимодействий в режим бозе-эйнштейновской конденсации компактных пар фермионов, роль которых в эксперименте выполняли двухатомные молекулы.

Впервые приготовлен двумерный ферми-газ атомов, открывающий путь экспериментальной реализации широкого круга задач: обнаружению неоднородной сверхтекучести Фульде–Ферела–Ларкина–Овчинникова, наблюдению новых типов фазовых переходов, созданию бездефектной модели высокотемпературного сверхпроводника с управляемой извне константой связи. Последнее позволит проверить двумерные теории высокотемпературной сверхпроводимости.

Разработана серия новых экспериментальных методов, благодаря которым выполнены описанные в диссертации наблюдения.

Впервые в России создана экспериментальная установка для приготовления квантового вырожденного газа атомов и молекул, как в режиме фермиевского вырождения, так и бозе-эйнштейновской конденсации. Достигнуты наименьшие в стране температуры.

Оглавление

1	Введение	6
1.1	Причины интереса к атомным ферми-газам	6
1.2	Вклад физики атомных ферми-газов в фундаментальную физику	7
1.2.1	Резонансная сверхтекучесть	7
1.2.2	Мост между статистикой Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна	8
1.2.3	Стабильность и основное состояние сильно взаимодействующей ферми-материи	9
1.3	Уникальные свойства, достоинства и недостатки атомных газов	9
1.4	Перспективы	10
1.4.1	Неоднородная сверхтекучесть, фермион Майораны, топологические возбуждения и моделирование ВТСП в двумерной системе	10
1.4.2	Проверка теории струн	11
1.4.3	Модель Хаббарда	12
1.5	История экспериментов с атомными ферми-газами	12
1.6	Общая характеристика диссертационной работы	15
1.6.1	Перечень и новизна результатов, выносимых на защиту. Роль автора	15
1.6.2	Актуальность работы	17
1.6.3	Публикации и доклады по теме диссертации	18
1.6.4	Рекомендации по использованию результатов диссертации	21
1.6.5	Структура диссертации	21
2	Обзор основных свойств газа ферми-атомов	23
2.1	Назначение и структура главы	23
2.2	Выбор лития-6 для реализации квантовых задачи многих тел	24
2.3	Состояния спина атома	25
2.4	Оптическая дипольная ловушка	27
2.4.1	Пленение в максимуме переменного электромагнитного поля	27
2.4.2	Веретенообразный потенциал	28
2.4.3	Серия дископодобных потенциалов	29
2.4.4	Сравнение оптической и магнитной ловушки	30
2.5	Идеальный ферми-газ в параболическом потенциале	30
2.6	Парные межатомные взаимодействия	33
2.6.1	Природа взаимодействия	33
2.6.2	Преобладание s -волнового рассеяния в электростатическом потенциале	34
2.6.3	Пренебрежение диполь-дипольным взаимодействием	36
2.6.4	Роль ферми-статистики в рассеянии	38
2.6.5	Резонанс Фано–Фешбаха	39
2.6.6	Регуляризованный δ -потенциал	42
2.6.7	Стабильность по отношению к неупругим столкновениям	44
2.7	Коллективные явления в газе взаимодействующих ферми-атомов	46

2.7.1	«Высокотемпературная» сверхтекучесть атомного газа	46
2.7.2	Универсальность газа с резонансными взаимодействиями	48
2.7.3	Мост между статистикой Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна	51
3	Экспериментальные методы	58
3.1	Приготовление газа путём лазерного пленения и охлаждения	58
3.1.1	Обзор процедуры приготовления	58
3.1.2	Охлаждение и пленение резонансным светом	59
3.1.3	Охлаждение в дипольной ловушке	62
3.2	Фотографирование и измерение распределения плотности	64
3.3	Дышащая мода облака	67
3.4	Измерение параметров потенциала	68
3.5	Энерго- и термометрия	70
3.5.1	Равнозначность измерения температуры и энергии	70
3.5.2	Термометрия почти идеального ферми-газа	71
3.5.3	Термометрия универсального ферми-газа	72
3.5.4	Энергометрия универсального ферми-газа	75
3.6	Прецизионный ввод энергии	76
3.7	Звук	78
3.7.1	Возбуждение звуковой волны	78
3.7.2	Измерение скорости звука	80
4	Двумерный ферми-газ атомов	85
4.1	Мотивация создания системы	85
4.2	Управление кинематической размерностью	86
4.3	Наблюдение и термометрия почти идеального двумерного ферми-газа	87
4.4	Доказательство двумерности	89
4.5	Преыдушие попытки приготовления двумерного ферми-газа атомов	90
5	Универсальный ферми-газ	93
5.1	Мотивация доказательства и исследования универсальности в атомном газе	93
5.2	Проверка универсальности в основном состоянии. Измерение универсального параметра β	94
5.2.1	Измерение β по размеру облака	94
5.2.2	Измерение β и проверка универсальности по скорости звука	95
5.2.3	Сравнение результатов измерений и расчётов β	96
5.3	Универсальность при произвольной температуре	98
5.3.1	Термодинамические величины	98
5.3.2	Универсальная гидродинамика сверхтекучей и нормальной фазы	99
5.3.3	Вириальная теорема	104
6	Сверхтекучесть	108
6.1	Поиск признаков сверхтекучести	108
6.2	Моделирование дышащей моды нормального газа и нормальной жидкости при помощи кинетического уравнения	110
6.3	Вывод о сверхтекучести атомного ферми-газа с резонансными взаимодействиями	116
6.4	Критическая температура и энергия сверхтекучего перехода при резонансном взаимодействии	120
6.5	Исчезновение сверхтекучей фазы при уменьшении взаимодействия	122

7	Термодинамика ферми-газов	127
7.1	Влияние статистики и фазовых переходов на термодинамические величины	127
7.2	Термодинамика идеального ферми-газа	128
7.3	Зависимость энергии от температуры в сильно взаимодействующем ферми-газе	129
7.4	Сравнение результатов измерения температуры и энергии в точке перехода к сверхтекучести	135
8	Мост между бозе- и ферми-состоянием	137
8.1	Задача об уравнении состояния на мосту БКШ–БЭК	137
8.2	Проверка уравнения состояния по распространению звука	138
9	Поиск квантового предела вязкости	141
9.1	Предсказание теории струн	141
9.2	Оценка вязкости в эксперименте с дышащей модой	142
10	Заключение	146
А	Идеальный ферми-газ в дископодобном гармоническом потенциале	147
A.1	Формулировка задачи	147
A.2	Энергия Ферми и профили концентрации при $T = 0$	147
A.3	Химический потенциал и профили концентрации при $T > 0$	149
Б	Поправки из-за ангармонизма внешнего потенциала	151
В	Интерференция цепочки бозе-эйнштейновских конденсатов со случайными фазами	153
	Литература	157

Глава 1

Введение

1.1 Причины интереса к атомным ферми-газам

Материя, обладающая массой покоя, построена из частиц с полуцелым спином. Разнообразные системы, состоящие из большого числа одинаковых или похожих фермионов, встречаются в природе и лабораториях. Свойства этих систем во многом определяются статистикой Ферми¹⁾–Дирака²⁾, которой подчинены входящие в них частицы. А сами системы объединены общностью теоретических подходов к их описанию и общим кругом задач. К ферми-системам можно отнести:

- материю нейтронных звёзд и систему нуклонов в тяжёлых атомных ядрах;
- кварк-глюонную плазму, существовавшую в первые мгновения Большого взрыва, а сейчас получаемую в ускорителях при столкновении тяжёлых ядер;
- электронный газ в металлах, полу- и сверхпроводниках, на поверхностях твёрдых тел и жидкостей;
- гелий-3 в жидкой фазе;
- газы нейтральных атомов-фермионов, которые лишь недавно, в 1999 году [1], научились готовить в квантово вырожденном состоянии, охлаждая до температур порядка микро- и нанокельвинов.

Общие теоретические подходы применимы, несмотря на разную природу частиц и межчастичных взаимодействий. Изучив одну ферми-систему, можно делать выводы о свойствах других. Например, измерения параметров атомного газа, приведённые в диссертации, позволили проверить расчёты энергии основного состояния нейтронной материи и одну из теорий высокотемпературной сверхпроводимости.

Вскоре после создания ультрахолодный газ ферми-атомов утвердился в качестве среды для наблюдения новых явлений квантовой физики, проверки фундаментальных теорий и моделирования других ферми-систем. Явления, которые впервые удалось наблюдать именно в атомном газе, перечислены в следующем разделе 1.2. Атомная система оказалась востребованной благодаря гибкости её параметров — возможности изменять сечение рассеяния в максимально широких пределах, а также настраивать спиновый состав, плотность, размерность и внешний потенциал.

¹⁾Enrico Fermi, 1901–1954

²⁾Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984

Исследование на примере атомной системы в ряде случаев может оказаться более предпочтительным, чем эксперимент с оригинальной ферми-системой, для которой теоретическая задача была изначально сформулирована. Например, в отличие от материи нейтронных звёзд, в атомном газе возможно прямое наблюдение явлений. В сравнении с экспериментальными образцами физики твёрдого тела, в атомном газе существенно более гибко настраиваются взаимодействия и спиновый состав. Кроме того, атомный газ не содержит неконтролируемых примесей. Эксперименты с ультрахолодными атомами позволяют проверять теоретические модели, описывающие другие ферми-системы — нейтронные звёзды и ядра тяжёлых атомов [2, 3], кварк-глюонную плазму [4], высокотемпературные сверхпроводники [5].

Наиболее важные достижения экспериментальной физики ферми-атомов в контексте фундаментальной физики и вклада в физику других ферми-систем изложены в следующем разделе 1.2. Уникальные свойства атомных ферми-газов, достоинства и недостатки в сравнении с другими ферми-системами перечислены в разделе 1.3. Перспективы направления и будущие эксперименты рассмотрены в разделе 1.4. История экспериментов с ультрахолодными ферми-газами атомов изложена в разделе 1.5. Там же перечислены научные группы, работающие в этом направлении.

Результаты, выносимые на защиту, перечислены в разделе 1.6. Показаны актуальность, новизна и пути использования результатов. Указана роль автора в их получении. Перечислены публикации автора по теме диссертации, отражено внимание научного сообщества к результатам.

1.2 Вклад физики атомных ферми-газов в фундаментальную физику

1.2.1 Резонансная сверхтекучесть

В атомном ферми-газе возможно s -волновое взаимодействие с отрицательной длиной рассеяния ($a < 0$), что соответствует притяжению между частицами. В такой системе при достаточно низкой температуре образуется сверхтекучая фаза, подобно образованию сверхпроводящей фазы в газе электронов. Сверхтекучесть и сверхпроводимость — явления одинаковой природы с той лишь разницей, что в последнем случае сверхпоток переносится заряд. Случай слабого взаимодействия ($|a| \ll L$, где L — межчастичное расстояние) исследован на примере традиционных сверхпроводников и описывается в рамках теории Бардина³⁾–Купера⁴⁾–Шриффера⁵⁾ (БКШ). В случае сильного s -волнового взаимодействия ($|a| \gg L$) сверхпоток впервые наблюдался в газе ферми-атомов [6, 7, 8, 9].

Термин «резонансная сверхтекучесть» используется, поскольку в экстремальном случае длина рассеяния при нулевой энергии a расходится к бесконечности, что соответствует резонансу рассеяния. Теоретическое описание резонансной сверхтекучести противоречиво — расхождение между различными моделями показано в подразделе 2.7.1 на странице 46. Само построение теории сильновзаимодействующих систем является сложной задачей ввиду отсутствия малого параметра.

Наблюдавшаяся резонансная сверхтекучесть атомного газа интересна в контексте высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). С физической точки зрения «высокотемпературность» можно рассматривать как наличие эффекта при температурах, сравнимых

³⁾John Bardeen, 1908–1991

⁴⁾Leon N. Cooper

⁵⁾John Robert Schrieffer

с локальной энергией Ферми $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi^2n)^{2/3}$, где \hbar — постоянная Планка⁶⁾, m — масса частицы, а n — концентрация частиц в каждом спиновом состоянии. Для слабозадействующей ферми-системы отношение критической температуры $T_{кр.}$ к ε_F можно оценить в рамках теории БКШ:

$$T_{кр.}/\varepsilon_F \sim e^{-\pi/2\kappa_F|a|}, \quad (1.1)$$

где $\hbar\kappa_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$ — импульс Ферми. Условие $|a| \ll L$ эквивалентно $\kappa_F|a| \ll 1$. В этом случае очевидно, что $T_{кр.} \ll \varepsilon_F$. В резонансном случае $a \rightarrow -\infty$ формула (1.1) неприменима, однако она показывает тенденцию: при росте $\kappa_F|a|$ отношение $T_{кр.}/\varepsilon_F$ растёт и может стать порядка 1. Задача о сверхтекучести [10, 11, 12, 13, 14] была одной из мотиваций первых экспериментов с ферми-газами атомов.

В диссертации сообщается о впервые произведённых наблюдениях сверхтекучего потока и измерениях критической температуры в ферми-газе атомов (главы 6 и 7). Температура возможного фазового перехода $T_{кр.}$ измерена в резонансном режиме и составила $\approx 0,3\varepsilon_F$. Для сравнения, в высокотемпературных сверхпроводниках $T_{кр.}/\varepsilon_F$ составляет $\sim 1\%$ ⁷⁾. Таким образом, в атомном газе скорее всего наблюдалась сверхтекучесть при наивысшей температуре в единицах энергии Ферми. Возможно, в резонансно-взаимодействующем ферми-газе созданы наиболее благоприятные условия для сверхтекучести и критическая температура равна максимально достижимой в ферми-системе. Разумеется, речь идёт о температуре в единицах энергии Ферми, а не в градусах.

Резонансная сверхтекучесть атомного газа, возможно, моделирует сверхтекучесть нейтронной материи нейтронных звёзд [17, 18]. Нейтроны с противоположными спинами взаимодействуют посредством s -волновых столкновений с длиной рассеяния $a = -18,8$ фм. В достаточно глубоких слоях нейтронной звезды межчастичное расстояние $L \ll |a|$, то есть взаимодействия сильные, что создаёт условия для появления резонансной сверхтекучести. Скачки частоты вращения пульсаров, возможно, возникают из-за образования вихрей в сверхтекучей нейтронной жидкости [18].

1.2.2 Мост между статистикой Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

Ультрахолодный ферми-газ атомов — первая и пока единственная система, в которой экспериментально реализован мост между статистикой Ферми–Дирака и статистикой Бозе⁸⁾–Эйнштейна⁹⁾ [19]. Это явление предсказано для экситонов в твёрдом теле [20] и кварков [21], но до настоящего момента в этих двух системах не наблюдалось.

Газ ферми-атомов со слабым притяжением ($a = 0-$) отвечает фермиевской стороне моста, где свойства системы определяются статистикой Ферми–Дирака. В этом режиме атомы-фермионы не образуют связанного состояния в вакууме. Однако благодаря наличию поверхности Ферми происходит спаривание в пространстве импульсов. Это состояние при $T = 0$ описывается в рамках модели среднего поля БКШ. Изменяя взаимодействие,

⁶⁾Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947

⁷⁾В сверхпроводниках на основе слоистых купратов, допированных дырками, достигнута $T_{кр.} = 164$ К [15]. Экспериментально для широкой группы купратов найдено [16], что критическая температура масштабируется с 2-мерной концентрацией носителей заряда в сверхпроводящем слое, образованном одной или несколькими близкими плоскостями CuO_2 :

$$T_{кр.} = (2,7 \pm 0,6 \text{ см}^2 \cdot \text{К}) 2 n_2, \quad (1.2)$$

где n_2 — концентрация носителей в одном спиновом состоянии. Используя эту формулу вместе с выражением для 2-мерной энергии Ферми $\varepsilon_F = 2\pi\hbar^2 n_2/m_e$, где m_e — масса электрона в отсутствии решётки, можно оценить, что $T_{кр.}/\varepsilon_F \approx 0,01$.

⁸⁾Satyendra Nath Bose, 1894–1974

⁹⁾Albert Einstein, 1879–1955

оказалось возможным перевести спаривание в импульсном пространстве в спаривание в координатном пространстве — пространственно большие куперовские пары трансформировались в компактные двухатомные молекулы-бозоны. Для этого длина рассеяния изменяется от $a = 0-$ до $a = 0+$ через резонанс $a = \infty$. Бозевская сторона моста ($a = 0+$) отвечает бозе-эйнштейновскому конденсату (БЭК) двухатомных молекул, в которые объединяются атомы при медленной смене взаимодействия. Для обозначения множества промежуточных состояний системы между сверхтекучей жидкостью в режиме БКШ и конденсатом молекул используется термин «мост БКШ–БЭК»¹⁰⁾. В середине моста лежит область сильных взаимодействий ($\chi_{\Phi}|a| \gg 1$), в которой автором диссертации вместе с коллегами обнаружена резонансная сверхтекучесть [6].

Моделирование свойств газа на мосту БКШ–БЭК, при произвольной длине рассеяния a , представляет собой сложную расчётную задачу. Различные теоретические модели дают количественно разные результаты. В диссертации сообщается о проверке уравнения состояния на мосту БКШ–БЭК, в широком диапазоне длин рассеяния (глава 8).

1.2.3 Стабильность и основное состояние сильновзаимодействующей ферми-материи

При рассмотрении ферми-системы с большим притягивающим взаимодействием естественным образом возникает вопрос о её стабильности: сможет ли давление Ферми противостоять межчастичному притяжению? Этот вопрос тесно перекликается с задачей Берча¹¹⁾ [2]:

Каково основное состояние системы фермионов со спином 1/2, взаимодействующих посредством потенциала с нулевым пространственным размером и бесконечной длиной рассеяния? При этом, если система состоит лишь из 2 частиц, то связанное состояние отсутствует. Нулевой размер потенциала достигается в пределе системы с потенциалом конечного размера r_0 и конечным числом частиц путём устремления сначала r_0 к 0, а затем — числа частиц к ∞ .

Интересно, что если сменить порядок взятия пределов, то есть сначала устремить число частиц к ∞ , то вся система сжимается в размер порядка r_0 [2].

Первой и единственной системой, в которой удалось экспериментально смоделировать задачу Берча, стал атомный газ [22]. Показано, что система остаётся стабильной, измерена энергия основного состояния. К условиям задачи Берча близка часть материи нейтронных звёзд [2, 3]. Таким образом, в атомном газе могут моделироваться свойства нейтронной среды. В диссертации сообщается о прецизионном измерении энергии основного состояния системы Берча новым методом — по скорости звука (подраздел 5.2.2 на странице 95).

1.3 Уникальные свойства, достоинства и недостатки атомных газов

Успехи в экспериментах достигнуты благодаря уникальному набору свойств, делающих атомный газ чрезвычайно удобной средой для поиска новых явлений, количественной и качественной проверки фундаментальных теорий. Система является уникально гибкой — возможна непрерывная перестройка в широких пределах основных параметров — длины рассеяния, плотности, температуры и населённости спиновых состояний. Точная

¹⁰⁾В англоязычной литературе — «BCS-BEC crossover».

¹¹⁾George F. Bertsch

настройка длины рассеяния s -волновых столкновений на любое значение возможна благодаря резонансу Фешбаха¹²⁾ (подраздел 2.6.5), также возможно управление p -волновыми столкновениями [23, 24]. Плотность перестраивается на два порядка благодаря гибкому изменению крутизны удерживающего гармонического потенциала. В диссертации сообщено о впервые осуществлённой прецизионной настройке температуры. Метод основан на точном вводе энергии. Населённости спиновых состояний могут изменяться независимо друг от друга [25, 26]. Созданы системы, состоящие из атомов с одним, двумя или тремя различными спинами [27]. Пространственная размерность системы также под контролем: в диссертации сообщается о впервые приготовленном двумерном ферми-газе атомов (глава 4). Одномерный газ тоже может быть получен [28]. Система фундаментально беспримесна, поскольку готовится методами спектроскопии, которые избирательны не только по отношению к химическим элементам, но и к изотопам.

Атомная система — единственная из ферми-систем, допускающая прямое мгновенное измерение распределения плотности. Прямое наблюдение профиля плотности в квантовой системе позволяет видеть разделение фаз, величину среднего поля, измерять термодинамические и механические характеристики и, в ряде случаев, фазу коллективной волновой функции. Вообще говоря, в процессе измерения происходит проецирование состояния системы на какое-либо множество состояний. Чем более полно это множество, тем больше можно узнать в процессе измерения. Примером максимально информативного измерения служит проекция на пространство координат или импульсов. Атомные газы позволяют спроецировать состояние системы на двумерное координатное пространство, причём проецирование происходит селективно по спиновому состоянию. В диссертации сообщается о повышении пространственного разрешения при измерении распределения плотности (раздел 3.2 на странице 64).

Зная очевидные достоинства атомного газа в сравнении с другими ферми-системами, перечислим его недостатки. Во-первых, в атомном эксперименте число частиц 10^2 – $10^6 \ll$ числа Авогадро¹³⁾, что, однако, пока не стало препятствием в наблюдении фундаментальных явлений и достижении термодинамического предела. Более того, в таких предполагаемых явлениях, как сверхтекучесть в атомном ядре [29] и гидродинамический поток кварк-глюонной плазмы [30], участвует ещё меньше частиц — десятки и тысячи соответственно. Во-вторых, атомная система неоднородна, поскольку в равновесном состоянии находится во внешнем потенциале, близком к гармоническому. Это несколько затрудняет сравнение с теоретическими моделями, которые, как правило, изначально строятся для однородных систем, а уже потом адаптируются к неоднородной атомной системе. В-третьих, шаг настройки температуры $\gtrsim \varepsilon_F/100$ — грубее, чем в твёрдом теле, где он составляет $\sim \varepsilon_F/10^5$. И наконец, в-четвёртых, к настоящему времени не приготовлены равновесные газы с p -волновым взаимодействием и взаимодействиями с более высоким значением момента импульса.

1.4 Перспективы

1.4.1 Неоднородная сверхтекучесть, фермион Майораны, топологические возбуждения и моделирование ВТСП в двумерной системе

В диссертации сообщается о впервые осуществлённом приготовлении двумерного ферми-газа атомов (глава 4). Эта экспериментальная система, возможно, позволит наблюдать ряд новых фундаментальных явлений, которые обсуждаются в данном подразделе.

¹²⁾Herman Feshbach, 1917–2000

¹³⁾Lorenzo Romano Amedeo Carlo DeMarkus Avogadro di Quaregna e di Cerreto, 1776–1856

Почти 50 лет назад предсказана конденсация куперовских пар в состоянии с ненулевыми импульсами [31], что равнозначно осциллирующему в пространстве параметру порядка [32]. Сверхпроводники и сверхтекучие жидкости с подобными свойствами названы неоднородными [32], а механизм спаривания по именам авторов [31, 32] называют спариванием Фульде¹⁴⁾–Ферела¹⁵⁾–Ларкина¹⁶⁾–Овчинникова¹⁷⁾ (ФФЛО). К настоящему моменту подобное спаривание не обнаружено в сверхпроводниках. В трёхмерном атомном газе поиск тоже не увенчался успехом, так как область параметров, в которой, возможно, присутствует эффект, очень узка [33]. В двумерном газе предсказаны более благоприятные условия наблюдения [34].

В отличие от трёхмерного случая, в двумерной геометрии может оказаться возможным приготовление стабильного газа с p -волновым взаимодействием [35]. Система интересна тем, что некоторые квантовые состояния в вихрях такой системы, возможно, будут фермионами Майораны¹⁸⁾ [36], для которых частица и античастица совпадают. Поиск фермионов Майораны ведётся в физике элементарных частиц и твёрдого тела. Предполагается, что нейтрино — фермионы Майораны. В физике твёрдого тела, возможно, фермионами Майораны являются возбуждения двумерного электронного газа в рутинате стронция (Sr_2RuO_4) [37].

Кроме того, возбуждения в двумерном ферми-газе с p -волновым взаимодействием могут быть защищены от потери когерентности топологическими свойствами [38]. Это откроет путь к созданию новых квантовых систем с долгоживущей макроскопической когерентностью. В практическом плане защищённые когерентные состояния могут оказаться полезными для создания квантового компьютера [39]. Ряд возбуждений могут быть не бозонами и не фермионами, а иметь энионную статистику [40].

В двумерном ферми-газе с p -волновым взаимодействием возможны фазовые переходы нового типа. Например, при изменении силы p -волнового взаимодействия возможен переход между состояниями с параметром порядка типа p_x и $p_x + ip_y$ [41].

В известных высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) электроны движутся в плоскости [42, 43]. Несмотря на значительный прогресс, механизм образования сверхпроводящей фазы в этих системах до конца не понят. Отсутствие теории ВТСП является препятствием на пути создания комнатотемпературных сверхпроводников. Сверхтекучесть двумерного ферми-газа атомов позволила бы моделировать высокотемпературную сверхпроводимость и количественно проверять соответствующие теории.

1.4.2 Проверка теории струн

В рамках струнных теорий сделано общее предсказание о том, что для любой жидкости отношение коэффициента сдвиговой вязкости η к плотности энтропии s ограничено снизу [44]:

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{4\pi}. \quad (1.3)$$

Нижний предел $\eta/s = \hbar/4\pi$ можно рассматривать как определение идеально невязкой жидкости. Теория струн к настоящему моменту не имеет экспериментальных подтверждений. Достижение барьера $\eta/s = \hbar/4\pi$ в широкой области параметров и демонстрация его непреодолимости могла бы стать первой экспериментальной проверкой этой теории.

¹⁴⁾Peter Fulde

¹⁵⁾Richard Alan Ferrell, 1926–2005

¹⁶⁾Анатолий Иванович Ларкин, 1932–2005

¹⁷⁾Юрий Николаевич Овчинников

¹⁸⁾Ettore Majorana, 1906–1938

Кандидатами на роль идеально невязких систем выступают кварк-глюонная плазма и ультрахолодный газ ферми-атомов. В первые мгновения после Большого взрыва кварк-глюонная плазма была основной формой материи. Сейчас кварк-глюонную плазму получают в ускорителях при столкновении тяжёлых ядер [30].

В диссертации показано, что атомный газ обладает крайне низкой вязкостью (глава 9). Продемонстрировано, что в широком диапазоне температур сильно взаимодействующий газ обладает свойствами жидкости (подраздел 5.3.2 на странице 99). Впервые измерен коэффициент сдвиговой вязкости η . Оценено отношение η/s и показано, что оно сравнимо со значениями в кварк-глюонной плазме.

1.4.3 Модель Хаббарда

Модель Хаббарда¹⁹⁾ является приближённой моделью твёрдого тела. Известные решения описывают большой набор фазовых состояний, включая изолятор, проводник, ферромагнетик, антиферромагнетик, сверхпроводник. Для 2- и 3-мерного пространства модель в общем виде не решена. Более того, неизвестен даже полный набор фазовых состояний, которые могут содержаться в модели. Атомный газ может быть приготовлен в почти точном соответствии с моделью Хаббарда [45]. Это позволило бы наблюдать в эксперименте состояния, уже предсказанные моделью, и, самое интересное, находить новые решения модели, которые ещё не известны из теоретических расчётов.

Модель описывает фермионы в периодическом потенциале. Частицы могут перескакивать между узлами потенциала и взаимодействовать, если находятся в одном узле. Модель основана на гамильтониане

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \left(\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \text{э.с.} \right) + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}. \quad (1.4)$$

Первое слагаемое описывает переходы фермионов между соседними узлами решётки за время $\sim \hbar/t$, а второе — за контактное взаимодействие частиц в одном узле, где U выступает в качестве параметра взаимодействия. Индексы i и j нумеруют узлы решётки, $\langle i, j \rangle$ подразумевают суммирование по всем соседним узлам, $\hat{c}_{i\sigma}^\dagger$ и $\hat{c}_{i\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения фермиона со спином $\sigma = \uparrow, \downarrow$ в i -м узле, $\hat{n}_{i\sigma} \equiv \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\sigma}$ — оператор числа частиц в i -м узле. Периодический потенциал для атомов может быть создан с помощью стоячих световых волн, а параметр взаимодействия может регулироваться с помощью резонансов Фешбаха.

1.5 История экспериментов с атомными ферми-газами

Ультрахолодные атомные ферми-газы появились в лабораториях сравнительно недавно. Первый вырожденный ферми-газ атомов получен в 1999 году группой Деборы Джин из Объединённого института лабораторной астрофизики²⁰⁾ [1]. Газ был приготовлен в магнитной ловушке. Следующей вехой стало приготовление ферми-газа в дипольной ловушке, образованной фокусом лазерного луча, группой Джона Томаса из Университета имени Дюка²¹⁾ [46]. Это, казалось бы, чисто техническое новшество позволило сделать магнитное поле свободным параметром, поскольку поле более не нужно для пленения. Магнитное поле, таким образом, можно использовать для управления межчастичным

¹⁹⁾John Hubbard, 1931–1980

²⁰⁾Deborah Jin, Joint Institute for Laboratory Astrophysics (JILA)

²¹⁾John E. Thomas, Duke University

взаимодействием при помощи резонанса Фешбаха. Университету имени Дюка это позволило в том же 2002 году приготовить ферми-газ в сильновзаимодействующем режиме [47], получив экспериментальную систему, объяснение свойств которой за последние годы существенно развило теорию ферми-систем. В подобной экспериментальной системе продемонстрированы: Университетом имени Дюка — стабильность резонансно взаимодействующего ферми-газа [22]; Университетом имени Дюка, Массачусетским институтом технологии²²⁾ и Университетом Инсбрука²³⁾ — резонансная сверхтекучесть [6, 7, 8, 9]; Университетом Инсбрука — мост между системой ферми-атомов и бозе-эйнштейновским конденсатом молекул [19]. Наблюдение сверхтекучего потока и измерение температуры фазового перехода, выполненные впервые, описаны в диссертации (главы 6 и 7).

В 2003 году группа Массимо Ингусцио из Университета Флоренции²⁴⁾ поместила ферми-газ в периодический потенциал, созданный стоячей электромагнитной волной [48], что открыло новые возможности для моделирования задач физики твёрдого тела о ферми-частицах в периодическом потенциале. В 2008 году группа Селима Ёхима из Института ядерной физики имени Макса Планка²⁵⁾ приготовила газ ферми-атомов в трёх спиновых состояниях [27], тем самым, существенно выйдя за рамки задач, известных в физике твёрдого тела. Эта система позволяет моделировать известную из ядерной физики задачу о состояниях Ефимова²⁶⁾ [49, 50] — связанном состоянии трёх фермионов при отсутствии связанных состояний между любыми двумя частицами из трёх. В 2010 группа автора диссертации в Институте прикладной физики РАН приготовила двумерный ферми-газ атомов [51], тем самым открыв возможность моделирования широкого круга задач пониженной размерности.

Группы экспериментаторов, работающие с атомными ферми-газами, перечислены в таблице 1.1. Порядок представления групп выбран в соответствии со временем публикации первого эксперимента с ферми-газом атомов или бозе-газом молекул, созданным на основе атомного ферми-газа.

Таблица 1.1 — Коллективы, работающие с атомными ферми-газами.

Институт, страна	Руководитель лаборатории	Атом	Год 1-го результата, ссылка	Направления исследований
JILA, США	Deborah Jin	^{40}K	1999 [1]	<i>s</i> - и <i>p</i> -волновые резонансы Фешбаха. Сверхтекучесть. Мост БКШ–БЭК. Ферми-молекулы KRb (вместе с Jun'ом Ye)
Rice Univ., США	Randall Hulet	^6Li	2001 [52]	Резонансы Фешбаха. Мост БКШ–БЭК. Разнонаселённые спины. 1D
Ecole Normale Supérieure, Франция	Christophe Salomon	^6Li	2001 [53]	Мост БКШ–БЭК. <i>p</i> -волновые резонансы Фешбаха. Термодинамика. Локальные измерения. Разнонаселённые спины
Duke Univ., затем North Carolina State Univ., США	John Thomas	^6Li	2002 [46]	Сверхтекучесть. Термодинамика. Универсальность. Гидродинамика. Квантовая вязкость. Спиновые волны

²²⁾Massachusetts Institute of Technology (MIT)

²³⁾Universität Innsbruck

²⁴⁾Massimo Inguscio, Università di Firenze

²⁵⁾Selim Jochim, Max-Planck-Institut für Kernphysik

²⁶⁾Виталий Н. Ефимов

Продолжение таблицы 1.1.

Институт, страна	Руководитель лаборатории	Атом	Год 1-го результата, ссылка	Направления исследований
MIT, США	Wolfgang Ketterle	^6Li	2002 [54]	s - и p -волновые резонансы Фешбаха. Сверхтекучесть. Разнонаселённые спины. Оптические решётки. Локальные измерения. Ферромагнетизм
Univ. Firenze, Италия	Massimo Inguscio	^{40}K	2002 [55]	2D. Интерферометрия. Оптические решётки. Взаимодействия между ферми- и бозе-атомами разной размерности
Univ. Innsbruck, Австрия	Rudolf Grimm	^6Li , ^{40}K	2003 [56]	Резонансы Фешбаха. Сверхтекучесть. Гидродинамика. Мост БКШ-БЭК. Смесь 2 ферми-атомов
Eidgenössische Technische Hochschule, Швейцария	Tilman Esslinger	^{40}K , ^6Li	2005 [57]	Оптические решётки. p -волновые резонансы Фешбаха. 2D. 1D. Локальные измерения
Tübingen Univ., Германия	Claus Zimmermann	^6Li	2005 [58]	p -волновой резонанс Фешбаха
Vrije Univ., Нидерланды	Wim Vassen	^3He	2006 [59]	Атомная оптика
Kyoto Univ., Япония	Yoshiro Takahashi	^{173}Yb , ^{171}Yb , ^6Li	2007 [60]	Симметрия $SU(2)\times SU(6)$. Оптические решётки. Смесь 2 ферми-атомов
Swinburne Univ. Technology, Австралия	Christopher Vale	^6Li	2007 [61]	p -волновые резонансы Фешбаха. Универсальность. Мост БКШ-БЭК. 2D
Univ. Electronics Communications, Япония	Takashi Mukaiyama	^6Li	2008 [62]	Сверхтекучесть. p -волновые резонансы Фешбаха. Универсальность. Термодинамика. Локальные измерения. 3 спина
Max Planck Inst. Kernphysik, потом Univ. Heidelberg, Германия	Selim Jochim	^6Li	2008 [27]	3 спина. Малое число частиц
Pennsylvania State Univ., США	Kenneth O'Hara	^6Li	2009 [63]	3 спина
MIT, США	Martin Zwierlein	^6Li , ^{40}K	2009 [64]	Поляроны. Спиновый перенос. Смесь 2 ферми-атомов
ИПФ РАН, Россия	А. В. Турлапов	^6Li	2010 [65]	2D. Локальные измерения. Атомная оптика
Rice Univ., США	Thomas Killian	^{87}Sr	2010 [66]	—
Univ. Cambridge, Великобритания	Michael Köhl	^{40}K	2011 [67]	2D

Продолжение таблицы 1.1.

Институт, страна	Руководитель лаборатории	Атом	Год 1-го результата, ссылка	Направления исследований
Univ. Washington, США	Subhadeep Gupta	${}^6\text{Li}$	2011 [68]	—

1.6 Общая характеристика диссертационной работы

1.6.1 Перечень и новизна результатов, выносимых на защиту. Роль автора

В серии экспериментов исследован сильно взаимодействующий газ ферми-атомов и его производная — бозе-эйнштейновский конденсат двухатомных молекул. Исходным веществом во всех экспериментах выступал газ атомов лития-6. Результаты не привязаны к газу конкретного химического элемента. Часть результатов применима к другим типам ферми-частиц — нейтронам, электронам, кваркам. Полученные результаты позволили проверить фундаментальные модели и теории, в том числе описывающие ядерную материю, высокотемпературные сверхпроводники, кварк-глюонную плазму. Впервые приготовлен 2-мерный ферми-газ атомов, что открыло путь к моделированию широкого круга фундаментальных задач в атомной системе.

Представленные к защите результаты могут быть разделены на две группы:

- а) наблюдение и изучение новых физических явлений и систем;
- б) создание новых экспериментальных методов.

Появление второй группы результатов связано с тем, что физика ультрахолодных ферми-атомов зародилась совсем недавно. Наблюдение новых явлений шло рука об руку с созданием и развитием методов эксперимента. Без появления новых методов многие измерения были бы невозможны. Например, к началу работы над диссертацией не существовало методов термометрии сильно взаимодействующего ферми-газа атомов. Создание новых экспериментальных методов стало ключом к наблюдению и пониманию физических процессов. Ниже следуют представленные к защите результаты, разделённые на две указанные группы. Все результаты получены впервые в мире, кроме результата **a11**, обладающего внутрироссийским приоритетом. Результаты **a10** и **a11** вошли в число важнейших научных достижений РАН 2010 года.

- а) Новые явления, наблюдения и физические системы:
 - 1) свидетельство сверхтекучести атомного ферми-газа (рассмотрено в разделе 6.3 на страницах 116–120);
 - 2) измерение зависимости энергии от температуры в сильно взаимодействующем ферми-газе (в разделе 7.3 на страницах 129–135);
 - 3) измерение температуры перехода к сверхтекучему состоянию в атомном ферми-газе (в разделе 7.3 на страницах 129–135);
 - 4) измерение температуры перехода к сверхтекучему состоянию альтернативным методом — по затуханию дышащей моды — в отличие от предыдущего измерения **a3**, выполненного по зависимости энергии от температуры (альтернативное измерение описано в разделе 6.4 на страницах 120–122);

- 5) наблюдение признаков разрушения сверхтекучего состояния при уменьшении взаимодействия в атомном ферми-газе (в разделе 6.5 на страницах 122–126);
- 6) экспериментальная проверка вириальной теоремы для ферми-газа в режиме резонансного взаимодействия (в подразделе 5.3.3 на страницах 104–107);
- 7) измерение сдвиговой вязкости, экспериментальная проверка квантового предела вязкости в атомном ферми-газе (в главе 9 на страницах 141–145);
- 8) наблюдение распространения звука в газе ферми-атомов, в газе бозе-молекул (в разделе 3.7 на страницах 78–84);
- 9) проверка уравнения состояния ферми- и бозе-системы при нулевой температуре в широком диапазоне s -волновых взаимодействий по скорости звука (в главе 8 на страницах 137–140);
- 10) приготовление, наблюдение 2-мерного ферми-газа атомов (в главе 4 на страницах 85–92);
- 11) создание первой в России установки для приготовления квантово вырожденного газа атомов и молекул, как в режиме фермиевского вырождения, так и бозе-эйнштейновской конденсации; достижение наименьших в стране температур, до 18 нК (в разделе 3.1 на страницах 58–64 и разделе 4.3 на страницах 87–89).

б) Новые экспериментальные методы:

- 1) термометрия сильновзаимодействующего ферми-газа атомов, применимая при произвольной температуре (описана в подразделе 3.5.3 на страницах 72–75);
- 2) прецизионный ввод энергии в сильновзаимодействующий ферми-газ атомов (в разделе 3.6 на страницах 76–78);
- 3) энергетрия сильновзаимодействующего ферми-газа атомов (в подразделе 3.5.4 на страницах 75–76);
- 4) управление кинематической размерностью ферми-газа при помощи внешнего потенциала (в разделе 4.2 на страницах 86–86);
- 5) существенное улучшение пространственного разрешения при измерении распределения плотности ферми-газа атомов (в разделе 3.2 на страницах 64–67);
- 6) термометрия двумерного ферми-газа атомов (в разделе 4.3 на страницах 87–89).

Результаты **a1–a9** и **b1–b3** получены в 2003–2006 году в Университете имени Дюка, в Лаборатории атомной, оптической и молекулярной физики, где автор диссертации работал в должности научного сотрудника со степенью²⁷⁾. Результаты **a1–a7** и **b1–b3** получены вместе с профессором Джоном Томасом и аспирантом Джозефом Кинастом²⁸⁾, а результаты **a8** и **a9** — вместе с профессором Джоном Томасом и аспирантом Джеймсом Джозефом²⁹⁾. В получении результата **a1** также участвовали Стейси Хеммер³⁰⁾ и Майкл Гейм³¹⁾, а в получении результатов **a8** и **a9** — Бейсон Кленси³²⁾, Ле Луо³³⁾ и Джозеф Кинаст. Руководитель Лаборатории атомной, оптической и молекулярной физики профессор Томас так характеризует роль автора диссертации³⁴⁾:

²⁷⁾ Postdoctoral research associate

²⁸⁾ Joseph Michael Kinast

²⁹⁾ James Adlai Joseph

³⁰⁾ Staci L. Hemmer

³¹⁾ Michael Eric Gehm

³²⁾ Bason Eric Clancy

³³⁾ Le Luo

³⁴⁾ Из характеристики, предоставленной Университетом имени Дюка при приёме автора на работу в ИПФ РАН. Хранится в личном деле в ИПФ РАН.

«. . . сыграл ведущую роль в наших исследованиях оптически пленённых, сильно взаимодействующих ферми-газов — теме, к которой проявляется огромный интерес. В этой роли руководил моими аспирантами в сложных экспериментах и был для меня великолепным коллегой при обсуждении и теории, и эксперимента, всесторонне участвовал в экспериментах, окончившихся публикациями значимых работ в последние три года.

Благодаря проницательности Андрея, вскоре по его прибытии была устранена важнейшая проблема экспериментальной установки, что сделало возможным все последующие измерения.»³⁵⁾

Результаты **a10**, **a11** и **64–66** получены в 2007–2010 году под руководством и при непосредственном участии автора в Институте прикладной физики РАН, где автор работал в должности ведущего научного сотрудника. Результаты получены вместе с младшим научным сотрудником Кириллом Алексеевичем Мартьяновым и аспирантом Василием Борисовичем Махаловым.

Автору принадлежит ведущая роль в проведении всех экспериментов. Кроме того, автор принимал участие во всех этапах процесса исследований, непосредственно участвовал во всех этапах получения данных и научных экспериментов, лично участвовал в апробации результатов исследований, разработке экспериментальных установок, обработке и интерпретации экспериментальных данных, подготовке публикаций. Экспериментальная установка ИПФ РАН создана под руководством и при непосредственном участии автора. Все результаты получены после защиты кандидатской диссертации.

1.6.2 Актуальность работы

Эксперименты с ультрахолодным газом ферми-атомов и его производными позволяют проверять фундаментальные теории, в том числе — применимые к широкому кругу ферми-систем — высокотемпературным сверхпроводникам [5], нейтронной и ядерной материи [2, 3], кварк-глюонной плазме [4]. Измерения термодинамических характеристик сильно взаимодействующего ферми-газа атомов позволили количественно проверить одну из моделей высокотемпературной сверхпроводимости (глава 7). Измерения энергии основного состояния атомного газа позволяют найти энергию основного состояния достаточно плотной нейтронной материи (глава 5). Гидродинамический поток сильно взаимодействующего ферми-газа атомов моделирует другую систему с предельно низкой вязкостью — кварк-глюонную плазму. Измерение вязкости и энтропии атомного газа может в итоге стать первой проверкой теории струн. О впервые выполненном измерении вязкости атомного ферми-газа сообщено в главе 9.

Измерение скорости звука в конденсате бозе-молекул Li_2 , сверхтекучем газе атомов лития-6 и в системе на мосту между этими двумя коллективными состояниями позволило проверить теории моста БКШ–БЭК. Эти теории носят фундаментальный характер, не привязаны к атомной системе и могут быть применены к другим ферми-системам. Например мост БКШ–БЭК был предсказан, но до сих пор не реализован для газа экситонов в твёрдом теле [20] и газа кварков [21].

Наблюдение новых явлений квантовой физики, проверка фундаментальных теорий и моделирование других ферми-систем стали возможными в атомном газе благодаря его уникальным свойствам. Взаимодействие между атомами может контролироваться изменяясь в максимально широких пределах, может настраиваться спиновый состав, плотность,

³⁵⁾ “Andrey has played a leading role in our research on optically trapped, strongly-interacting atomic Fermi gases, a topic of great current interest. In this role, Andrey has lead my students in difficult experiments, he has been a superb colleague to me in discussing both theory and experiments, and he has participated in every aspect of experiments which yielded several very influential papers from my group in the last three years.

As a result of his insights shortly after his arrival, we solved a major problem with the original apparatus, which enabled all of our subsequent experimental measurements.”

размерность и внешний потенциал. Сама система фундаментально беспримесна. Возможно построение атомной системы в соответствии с наперёд заданными гамильтонианом, в отличие от более традиционных подходов физики твёрдого тела, где гамильтониан часто строится для приближённого описания уже существующей системы. Создание экспериментальных методов для атомной системы, таким образом, актуально для развития фундаментальной физики и понимания других ферми-систем.

Вынесенные на защиту экспериментальные методы позволили произвести количественное исследование системы. Например, благодаря созданию метода термометрии и метода прецизионного ввода энергии стало возможным изложенное в диссертации, впервые выполненное последовательное изучение термодинамики сильно взаимодействующего ферми-газа атомов. Проверка при конечных температурах гипотезы об универсальности ферми-газа в унитарном режиме и создание метода энергометрии легли в основу последующих измерений термодинамических характеристик сильно взаимодействующего газа ферми-атомов [69, 70].

Приготовление 2-мерного ферми-газа атомов существенно расширило круг задач, моделирование которых может быть доступно при помощи ультрахолодных атомных газов (раздел 1.4.1). В этой системе, возможно, впервые удастся наблюдать куперовские пары с ненулевым импульсом — так называемое спаривание Фульде–Фарелла–Ларкина–Овчинникова [31, 32]. Контролируемая атомная система позволит моделировать двумерные задачи высокотемпературной сверхпроводимости. В двумерии есть обоснованные надежды на стабильность атомной системы с p -волновыми взаимодействиями [35]. Это, возможно, позволит наблюдать в виде квазичастицы давно искомый фермион Майораны [41].

1.6.3 Публикации и доклады по теме диссертации

По теме диссертации опубликованы 12 статей в рецензируемых журналах и 4 статьи в трудах международных конференций. Выпущена 1 научно-популярная статья. Сделано 11 приглашённых докладов на конференциях. Часть работ вызвала широкий интерес в научном мире — публикации процитированы более 1000 раз, некоторые освещены научно-популярной прессой. Данные о цитировании приведены по материалам Web of Science и arXiv.org. Все работы выполнены после защиты кандидатской диссертации.

Статьи в рецензируемых журналах

- 1 Dynamics of a highly-degenerate, strongly-interacting Fermi gas of atoms / J. E. Thomas, S. L. Hemmer, J. Kinast, A. Turlapov, M. E. Gehm, K. M. O'Hara // *Journal of Low Temperature Physics*. — 2004, Jan. Vol. 134. P. 655–664.

Процитирована 1 раз.

- 2 Evidence for superfluidity in a resonantly interacting Fermi gas / J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. — 2004, Apr. Vol. 92, no. 15. P. 150402.

Процитирована 472 раза.

Освещена в репортажах (*Physics Today*. 2004. Vol. 58. May. P. 23; *ibid.* July. P. 25), (*Science News*. 2004. Vol. 166. 18 Sep. P. 186), (NASA. 2004. 27 Apr. URL: <http://www.jpl.nasa.gov/releases/2004/112.cfm>) и других.

Репортаж (*Physics News Update*. 2004. No. 681. 13 April) отмечен в числе лучших историй 2004 года (American Institute of Physics. *Physics News*. 2005. Feb. P. 5).

- 3 Kinast J., Turlapov A., Thomas J. E. Breakdown of hydrodynamics in the radial breathing mode of a strongly interacting Fermi gas // *Physical Review A*. — 2004, Nov. Vol. 70, no. 5. P. 051401.
Прочитана 78 раз.
- 4 Heat capacity of strongly-interacting Fermi gas / J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas, Q. Chen, J. Stajic, K. Levin // *Science*. — 2005, Feb. Vol. 307. P. 1296.
Прочитана 240 раз.
Репортажи о работе вышли в (*Nature*. 2005. Vol. 433, 3 Feb. P. 474), (*Physics Today*. 2005. Vol. 58. July. P. 25), (American Institute of Physics. *Physics News Graphics*. 2005. 5 Jul. URL: <http://www.aip.org/png/2005/235.htm>) и других изданиях.
- 5 Kinast J., Turlapov A., Thomas J. E. Damping in a unitary Fermi gas // *Physical Review Letters*. — 2005, May. Vol. 94. P. 170404.
Прочитана 60 раз.
Репортажи о работе опубликованы в (*Physics Today*. 2005. Vol. 58. July. P. 25) и (American Institute of Physics. *Physics News Graphics*. 2005. 5 Jul. URL: <http://www.aip.org/png/2005/235.htm>).
- 6 Thomas J. E., Kinast J., Turlapov A. Virial theorem and universality in a unitary Fermi gas // *Physical Review Letters*. — 2005, Sep. Vol. 95, no. 12. P. 120402.
Прочитана 80 раз.
- 7 Evaporative cooling of unitary Fermi gas mixtures in optical traps / L. Luo, B. Clancy, J. Joseph, J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas // *New Journal of Physics*. — 2006, Sep. Vol. 8. P. 213.
Прочитана 6 раз.
- 8 Measurement of sound velocity in a Fermi gas near a Feshbach resonance / J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. — 2007, Apr. Vol. 98, no. 17. P. 170401.
Прочитана 43 раза.
- 9 Is a gas of strongly interacting atomic fermions a nearly perfect fluid? / A. Turlapov, J. Kinast, B. Clancy, Le Luo, J. Joseph, J. E. Thomas // *Journal of Low Temperature Physics*. — 2008, Feb. Vol. 150. P. 567–576. Published online 21 Nov. 2007.
Прочитана 28 раз.
- 10 Мартянов К. А., Махалов В. Б., Турлапов А. В. Наблюдение вырожденного ферми-газа, пленённого стоячей электромагнитной волной // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2010, апр. Т. 91, вып. 8. С. 401–404.
Прочитана 1 раз.
Результат работы отмечен в (*Отчётном докладе Президиума Российской академии наук «Научные достижения РАН в 2010 году»*, РАН, 2011).
- 11 Martiyanov Kirill, Makhalov Vasily, Turlapov Andrey. Observation of a two-dimensional Fermi gas of atoms // *Physical Review Letters*. — 2010, Jul. Vol. 105, no. 3. P. 030404.
Прочитана 20 раз.
Журнал опубликовал с пометкой «Редакторы рекомендуют».

Репортаж о работе вышел в (*Science*. 2010. Vol. 329. 30 Jul. P. 492). Основной результат работы отмечен в (*Отчётном докладе Президиума Российской академии наук «Научные достижения РАН в 2010 году»*, РАН, 2011).

- 12 Турлапов А. В. Ферми-газ атомов // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2012, янв. Т. 95, вып. 2. С. 104–112.

Статьи в трудах международных конференций

- 1 Dynamics of a highly-degenerate, strongly-interacting Fermi gas / J. E. Thomas, S. L. Hemmer, J. M. Kinast, A. V. Turlapov, M. E. Gehm, K. M. O'Hara // *Laser spectroscopy: Proceedings of the XVI international conference. 13–18 July 2003. Palm Cove, Far North Queensland, Australia* / Ed. by Peter Hannaford, Andrei Sidorov, Hans Bachor. — 2003. P. 137–144.
- 2 Thomas J. E., Kinast J., Turlapov A. Thermodynamics and mechanical properties of a strongly-interacting Fermi gas // *Laser spectroscopy: Proceedings of the XVII international conference. 19–24 June 2005. Aviemore, Scotland* / Ed. by E. A. Hinds, Allister Ferguson, Erling Riis. — 2005. P. 223–228.
- 3 Thomas J. E., Kinast J., Turlapov A. Universal thermodynamics of a strongly interacting Fermi gas // *Low Temperature Physics: 24th international conference on low temperature physics (LT24). 10–17 August 2005. Orlando, FL, USA* / Ed. by Y. Takano, S. P. Hershfield, P. J. Hirschfeld, A. M. Goldman // American Institute of Physics. *AIP conference proceedings*. — 2006. Vol. 850. P. 69–76.
- 4 Optical trapping and fundamental studies of atomic Fermi gases / J. E. Thomas, J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov // *Optical trapping and optical micromanipulation III. 13–17 August 2006. San Diego, CA, USA* / Ed. by K. Dholakia, G. C. Spalding // *Proceedings of SPIE*. — 2006. Vol. 6326. P. 632602.

Научно-популярная статья

Kinast J., Turlapov A., Thomas J. E. Optically trapped Fermi gases model strong interactions in nature // *Optics and Photonics News*. — 2005. Vol. 16. P. 21.

Приглашённые доклады автора диссертации

- 1 Experiments with a cold strongly-interacting Fermi gas // The 70th annual meeting of the southeastern section of the American Physical Society. 6–8 November 2003. Wilmington, NC, USA.
- 2 Experiments with a degenerate gas of Fermi atoms // II international conference “Frontiers of nonlinear physics”. 5–12 July 2004. Nizhny Novgorod, Russia.
- 3 Universal properties of Fermi gases near a Feshbach resonance // 2005 March meeting of the American Physics Society. 21–25 March 2005. Los Angeles, CA, USA.
- 4 Dynamics and thermodynamics of a strongly-interacting Fermi gas // European Science Foundation exploratory workshop “New phenomena in superfluidity and superconductivity”. 4–5 July 2005. Camerino, Italy.
- 5 Universality and superfluidity in a strongly-interacting Fermi gas // Workshop “Strong correlations in ultra-cold Fermi systems”. 15–21 January 2006. Aspen, CO, USA.

- 6 Quantum viscosity of a strongly-interacting Fermi gas // Workshop “The interface of quark-gluon plasma physics and cold-atom physics”. 19–23 March 2007. Trento, Italy.
- 7 Why does a gas of strongly-interacting fermions behave as a nearly perfect fluid? // International symposium on quantum fluids and solids. 1–6 August 2007. Kazan, Russia.
- 8 Ultracold Fermi atoms in 2 and 3 dimensions // IV international conference “Frontiers of nonlinear physics” (FNP 2010). 13–20 July 2010. Nizhniy Novgorod – St. Petersburg, Russia.
- 9 Quasi-two-dimensional gas of Fermi atoms // International conference on coherent and nonlinear optics (ICONO 2010). 23–26 August 2010. Kazan, Russia.
- 10 Experiments with ultracold atomic gases // HIC-for-FAIR school and workshop on dense QCD phases in heavy-ion collisions. 21 August – 4 September 2010. JINR, Dubna, Russia.
- 11 Two-dimensional Fermi gas of atoms // Workshop on frontiers in ultracold Fermi gases. 6–10 June 2011. Trieste, Italy.

1.6.4 Рекомендации по использованию результатов диссертации

Результаты получены в эксперименте с газом атомов лития-6. В основном результаты носят фундаментальный характер, не привязаны к конкретному химическому элементу, а часто — и к типу ферми-частицы вообще. Часть результатов может быть применена к нейтронной материи, электронному газу в твёрдом теле и кварк-глюонной плазме.

Приготовление двумерного ферми-газа атомов, возможно, позволит впервые наблюдать ряд явлений, описанных в подразделе 1.4.1. Возможно, будет обнаружена неоднородная сверхтекучесть Ларкина–Овчинникова–Фульде–Ферела, удастся пронаблюдать давно искомый фермион Майораны и новые типы фазовых переходов. Двумерная атомная система может стать бездефектной моделью высокотемпературного сверхпроводника с управляемой извне константой связи. Последнее позволит проверить двумерные теории высокотемпературной сверхпроводимости.

Количественные измерения параметров трёхмерного сильно взаимодействующего газа могут служить проверке фундаментальных теорий сильно взаимодействующей материи, в том числе теорий, изначально созданных для твёрдого тела, нейтронной и ядерной материи. Для той же цели могут быть использованы измерения характеристик атомного газа на мосту БКШ–БЭК.

Созданные экспериментальные методы могут найти применение в будущих экспериментах над ультрахолодными газами ферми-атомов. Методы являются достаточно общими, их применимость не ограничена атомом лития.

1.6.5 Структура диссертации

Работа напечатана на 292 страницах, состоит из введения, 8 глав, заключения, 3 приложений и списка источников, содержащего 208 наименований. В диссертацию входят 67 рисунков и 5 таблиц.

Вклад физики атомных ферми-газов в фундаментальную физику, история и перспективы направления, актуальность диссертации изложены во введении, которое также содержит публикации автора по теме работы и выносимые на защиту результаты. Основные свойства газа ферми-атомов лития и его производных описаны в главе 2. Эта глава приведена для знакомства с объектом экспериментов и не содержит новых сведений.

Новые результаты, полученные автором диссертации, изложены в последующих главах 3–9. Небольшое количество результатов, полученных без существенного участия автора, включено в эти главы для полноты и ясности описания. Подобные включения ясно обозначены.

Каждая из глав 4–9 посвящена какой-либо фундаментальной задаче, исследованной на примере атомного ферми-газа. Для полноты изучения каждая задача, по возможности, исследовалась несколькими экспериментальными методами. Методы, общие для нескольких задач, и приготовление экспериментальной системы описаны в главе 3. Основное внимание уделено новым методам. Ранее известные методы освещены кратко, даны ссылки на обзоры или оригинальные статьи.

О впервые осуществлённых приготовлении и наблюдении 2-мерного ферми-газа атомов сообщено в главе 4. Гипотеза об универсальности 3-мерного газа с резонансным взаимодействием проверена в главе 5, в том числе впервые — при ненулевой температуре. О впервые произведённом наблюдении сверхтекучего потока в ферми-газе атомов и об измерении критической температуры и энергии сообщается в главе 6. Впервые выполненным термодинамическому измерению над сильно взаимодействующим атомном ферми-газом и измерению температуры фазового перехода посвящена глава 7. Проверка уравнения состояния на мосту БКШ–БЭК описана в главе 8. Поиску квантового предела вязкости для проверки теории струн посвящена глава 9.

В заключении перечислены основные результаты. Материалы, которые могут оказаться полезными для воспроизведения содержащихся в диссертации расчётов, приведены в приложениях А и Б. Формулы для идеального ферми-газа в дископодобном потенциале помещены в приложение А. Поправки, связанные с ангармонизмом потенциала, обсуждаются в приложении Б. Применение газа ферми-атомов для изучения явлений за пределами квантовой задачи многих тел продемонстрировано в приложении В, где описана интерференция цепочки молекулярных бозе-эйнштейновских конденсатов со случайными фазами.

Глава 2

Обзор основных свойств газа ферми-атомов

2.1 Назначение и структура главы

Для экспериментов выбран газ атомов лития-6. Данный газ удобен для изучения общих свойств ферми-систем. Глава представляет собой введение в физику атомных ферми-газов и знакомит с их основными свойствами. Первоочередное внимание уделено свойствам, позволяющим рассматривать атомный газ с точки зрения теории конденсированных сред. Описание приведено на основе известных моделей и не содержит новых научных результатов. Изложение новых результатов в последующих главах использует идеи и модели этой главы. Читатель, знакомый с областью ультрахолодных ферми-газов, может пропустить данную главу.

Выбор лития-6 обосновывается в разделе 2.2. Спиновые состояния атома, принципиальные для задач фермиевской физики, описаны в разделе 2.3. Принципы пленения нейтральных атомов в высокочастотном электромагнитном поле и создания параболических потенциалов изложены в разделе 2.4. Свойства идеального ферми-газа в параболическом потенциале рассчитаны в разделе 2.5. Парные взаимодействия и возможности по управлению ими описаны в разделе 2.6. Перестраиваемые сильные взаимодействия открывают возможность управления коллективными свойствами системы, которым посвящён раздел 2.7. Обосновано появление «высокотемпературной» сверхтекучести в ультрахолодном атомном газе. Сравняются теоретические предсказания о величине критической температуры. Рассмотрено описание сильновзаимодействующего ферми-газа при помощи универсальных констант, которые не зависят не только от типа атома, но и от типа ферми-частицы вообще. Рассмотрена простая модель моста БКШ–БЭК и образования бозе-эйнштейновского конденсата молекул из атомного ферми-газа.

Для атомной системы применим термин «газ», поскольку межчастичные расстояния на 3–4 порядка больше характерных размеров электростатических потенциалов, вносящих основной вклад во взаимодействие. Более того, межатомные взаимодействия можно выключить почти полностью, реализовав идеальный ферми-газ. В то же время, в режиме сильных взаимодействий по отношению к атомной системе правомерен термин «жидкость». Сечение и частота столкновений могут быть настолько велики, что коллективное движение системы подчиняется уравнениям гидродинамики. Также система становится жидкостью при появлении сверхтекучей фазы.

2.2 Выбор лития-6 для реализации квантовых задачи многих тел

При выборе атома основным критерием стала пригодность для реализации широкого круга фундаментальных задач физики ферми-систем. Отсюда проистекают два требования к атому:

- известные и удобные спектральные свойства, дающие возможность лазерного охлаждения, пленения и наблюдения;
- известные и перестраиваемые в широких пределах парные взаимодействия.

С точки зрения спектральных свойств наиболее удобны атомы щелочных металлов, обладающие одним валентным электроном с водородоподобными уровнями энергии. Для всех этих металлов отработана техника пленения и охлаждения в магнито-оптической ловушке. Два щелочных металла имеют природные изотопы фермионы — это литий-6 и калий-40. У обоих металлов есть резонансы Фешбаха, настраиваемые магнитным полем, что даёт удобный способ управления взаимодействиями. У калия-40 вблизи резонанса Фешбаха частота неупругих столкновений многократно выше, чем у лития-6 ([71], страница 80), поэтому литий-6 более предпочтителен для получения сильновзаимодействующей системы в термодинамическом равновесии.

Кроме двух щелочных ферми-атомов, до состояния вырождения охлаждён гелий-3 в метастабильном электронном состоянии [59], редкоземельный элемент иттербий-173 [60] и щёлочноземельный металл стронций-87 [66], имеющий 2 валентных электрона, как и иттербий. У стронция и иттербия скорее всего отсутствуют резонансы Фешбаха, перестраиваемые магнитным полем [72]. В метастабильном гелии-3 резонансами Фешбаха сложно воспользоваться [59], поскольку стабильные к ионизирующим столкновениям состояния атома являются собственными для операторов проекции спина электронов \hat{S}_z и ядра \hat{I}_z и, таким образом, симметричные и антисимметричные состояния пары не перемешаны сверхтонким взаимодействием.

Таким образом, литий-6 выглядит наиболее предпочтительно с точки зрения управления межатомными взаимодействиями. Этот атом использован в экспериментах и в Университете имени Дюка, и в ИПФ РАН. Изотоп литий-6 содержится в природном литии количестве 7,5%. Методы обогащения до 100% известны и отработаны ввиду применения лития-6 в термоядерных боеприпасах.

Ядро лития-6 состоит из 3 протонов и 3 нейтронов, а электронная оболочка содержит 3 электрона. То есть атом состоит из нечётного числа частиц со спином 1/2 и является фермионом. Спин ядра $I = 1$. Конфигурация электронной оболочки в основном состоянии $1s^2 2s^1$, а основное состояние единственного валентного электрона¹⁾ $2^2S_{1/2}$. Спин электронов равен спину валентного электрона $S = 1/2$. Наиболее сильный электродипольный переход лежит в видимой части спектра, на длине волны 671 нм, используется для пленения и предварительного охлаждения в магнито-оптической ловушке, а также для измерения плотности газа. Переход лежит в видимой части спектра, что способствует удобству и безопасности экспериментов. Более подробно свойства лития-6, относящиеся к экспериментам, представлены по ходу изложения. Детальное описание свойств атома лития-6 можно найти в приложении А диссертации Майкла Гейма [73].

¹⁾Состояние записано в обозначениях $n^{2S+1}L_J$, где n — номер водородоподобной орбитали, S — полный спин валентных электронов, L — орбитальный угловой момент валентных электронов, J — полный угловой момент валентных электронов.

2.3 Состояния спина атома

Принципиальную роль для свойств ферми-систем играет спиновая степень свободы. Для электронов или нейтронов проекция спина может принимать лишь два значения, \uparrow и \downarrow . Роль спина в атомном газе выполняет внутреннее состояние атома. В экспериментах, о которых пойдёт речь, используются атомы в основном электронном состоянии. Внутренние состояния лития-6 в данном случае — это состояния полного спина системы валентный электрон + ядро. Всего таких состояний $(2S + 1)(2I + 1) = 6$, то есть в 3 раза больше, чем у электрона. Таким образом, благодаря спиновому разнообразию в атомном газе возникает более широкий круг задач, чем в электронном газе.

Системы с числом внутренних состояний бóльших двух известны в ядерной физике. Нейтроны и протоны в состояниях \uparrow и \downarrow могут рассматриваться как спиновые состояния фермиона со спином $3/2$, поскольку массы протона и нейтрона близки, а электрическим зарядом протона можно пренебречь, например, если кулоновская энергия много меньше энергии фундаментального сильного взаимодействия. Другой пример частиц с большим набором степеней свободы — кварки, у которых в дополнение к двум спином есть три цвета.

Найдём спиновые состояния атома, выразив их через собственные состояния операторов проекции спина электрона и ядра, $|S_z, I_z\rangle$. В отсутствии внешних полей основные состояния атома определяются гамильтонианом взаимодействия между магнитным моментом электрона и ядра

$$\hat{H} = \hbar a_{\text{св/т}} \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{I}}, \quad (2.1)$$

где $a_{\text{св/т}} = 2\pi \cdot (152,1 \text{ МГц})$. Из гамильтониана можно найти энергии основных состояний атома относительно энергии основного состояния $2^2S_{1/2}$ валентного электрона. На рисунке 2.1 показаны энергии собственных состояний гамильтониана (2.1). Поскольку

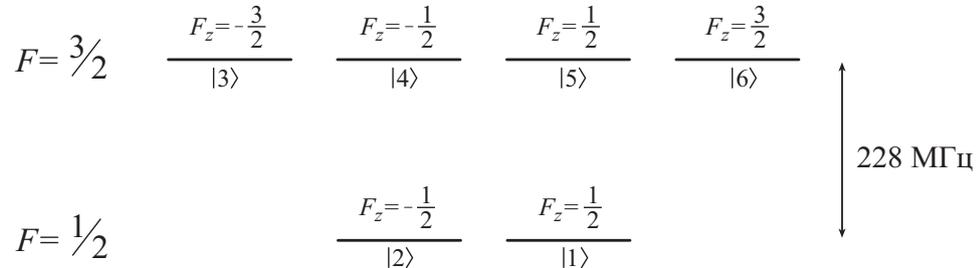


Рисунок 2.1 — Состояния спина лития-6 в основном состоянии валентного электрона $2^2S_{1/2}$ в нулевом магнитном поле, $\vec{B} = 0$. Базис $|F, F_z\rangle$ в пределе $\vec{B} = 0$ совпадает с базисом $|1\rangle$ – $|6\rangle$, определённым формулами (2.3)–(2.8).

гамильтониан коммутирует с оператором полного спина атома $\hat{\vec{F}} = \hat{\vec{S}} + \hat{\vec{I}}$, квантовые числа F и F_z использованы для нумерации состояний. Состояния с одинаковым модулем полного спина вырождены по энергии. Расстояние между уровнями $F = 1/2$ и $F = 3/2$ называют сверхтонким расщеплением, которое для лития-6 равно 228,2 МГц. Это самое маленькое расщепление среди щелочных металлов.

Для понимания системы необходимо знать спиновые состояния атома в постоянном однородном магнитном поле \vec{B} , поскольку оно используется для управления межатомными взаимодействиями (подраздел 2.6.5 на странице 39). Найдём состояния спина атома в магнитном поле. Гамильтониан получается добавлением в формулу (2.1) двух слагаемых, отвечающих за взаимодействие соответственно спина электрона и ядра с магнитным

полем \vec{B} :

$$\hat{H} = \hbar a_{\text{св/т}} \hat{S} \cdot \hat{I} + g_S \mu_B \hat{S} \cdot \vec{B} + g_I \mu_B \hat{I} \cdot \vec{B}, \quad (2.2)$$

где $\mu_B = \hbar|e|/2m_e c = 2\pi\hbar \cdot (1,3996 \text{ МГц/Гс})$ — магнетон Бора²⁾, а $g_S = 2,0023010$ и $g_I = -0,0004476540$ — гиромагнитное отношение для спина электрона и ядра соответственно. Последнее слагаемое гамильтониана (2.2) в дальнейших расчётах не учитывается ввиду малости. Зависимость энергии шести собственных состояний от магнитного поля приведена на рисунке 2.2. Выбрав ось z вдоль \vec{B} , можно выразить собственные состояния

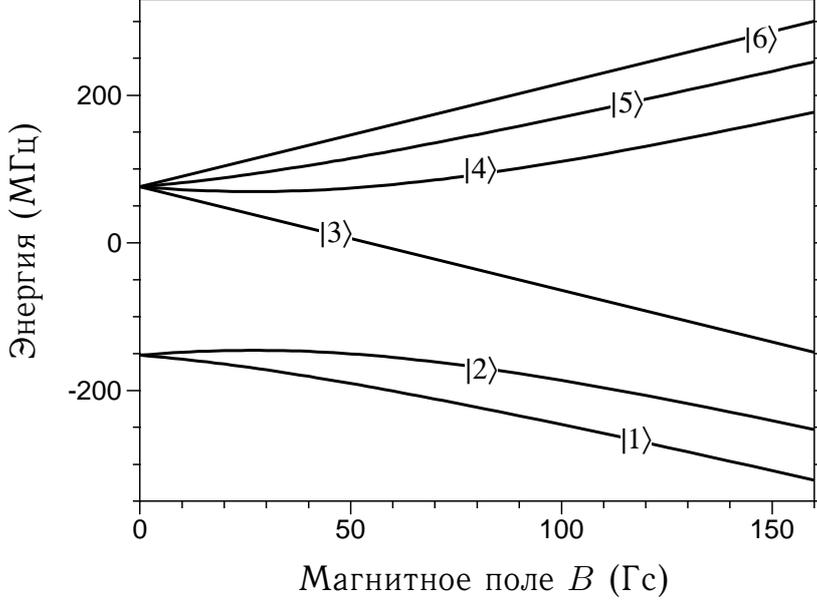


Рисунок 2.2 — Энергии основных состояний лития-6 в магнитном поле.

гамильтониана (2.2) в базисе $\{|S_z, I_z\rangle\}$ [74]. Выпишем их в порядке возрастания энергии:

$$|1\rangle = \cos \theta_+ \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle - \sin \theta_+ \left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle, \quad (2.3)$$

$$|2\rangle = \cos \theta_- \left| -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle - \sin \theta_- \left| \frac{1}{2}, -1 \right\rangle, \quad (2.4)$$

$$|3\rangle = \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle, \quad (2.5)$$

$$|4\rangle = \cos \theta_- \left| \frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \sin \theta_- \left| -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle, \quad (2.6)$$

$$|5\rangle = \cos \theta_+ \left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle + \sin \theta_+ \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \quad (2.7)$$

$$|6\rangle = \left| \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \quad (2.8)$$

где

$$\sin \theta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + (Z^{\pm} + R^{\pm})^2/2}}, \quad Z^{\pm} = \frac{g_S \mu_B B}{\hbar a_{\text{св/т}}} \pm \frac{1}{2}, \quad R^{\pm} = \sqrt{(Z^{\pm})^2 + 2}. \quad (2.9)$$

В магнитном поле $B \ll \hbar a_{\text{св/т}}/g_S \mu_B \approx 50 \text{ Гс}$ состояния $|1\rangle$ – $|6\rangle$ асимптотически переходят в состояния $|F, F_z\rangle$, показанные на рисунке 2.1. В больших магнитных полях, $B \gg 50$

²⁾Niels Henrik David Bohr, 1885–1962

Гс, вклад первого слагаемого гамильтониана (2.2) мал, что делает состояния близкими к состояниям $|S_z, I_z\rangle$:

$$|1\rangle \approx \left|-\frac{1}{2}, 1\right\rangle, \quad |2\rangle \approx \left|-\frac{1}{2}, 0\right\rangle, \quad |3\rangle = \left|-\frac{1}{2}, -1\right\rangle, \quad (2.10)$$

$$|4\rangle \approx \left|\frac{1}{2}, -1\right\rangle, \quad |5\rangle \approx \left|\frac{1}{2}, 0\right\rangle, \quad |6\rangle = \left|\frac{1}{2}, 1\right\rangle. \quad (2.11)$$

При произвольном магнитном поле атом не находится в собственном состоянии оператора \hat{F}^2 , однако во всех состояниях определено квантовое число $F_z = S_z + I_z$, поскольку $[\hat{F}_z, \hat{H}] = 0$.

При использовании смеси состояний встаёт вопрос о соотношении упругих и неупругих столкновений. Неупругие столкновения препятствуют установлению термодинамического равновесия за счёт потери частиц и перевода внутренней энергии в кинетическую. Стабильность смесей обсуждается в подразделе 2.6.7.

2.4 Оптическая дипольная ловушка

2.4.1 Пленение в максимуме переменного электромагнитного поля

Для приготовления атомов в виде смеси разных спиновых состояний необходима ловушка, которая во-первых, удерживает атом независимо от его внутреннего состояния, а во-вторых, консервативна на временах наблюдения. Этим условиям удовлетворяет оптическая дипольная ловушка. Простейший вариант такой ловушки — это фокус лазерного луча. Пленение в фокусе показано на рисунке 2.3.

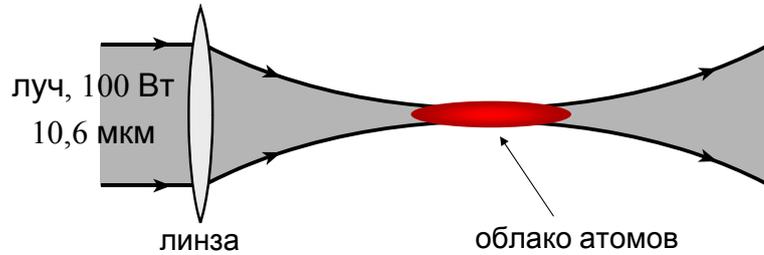


Рисунок 2.3 — Пленение облака атомов (показано красным) в фокусе луча лазера.

Пленение возникает из-за взаимодействия электрического дипольного момента атома \vec{d} с переменным электрическим полем $\vec{\mathcal{E}}(t)$. В отсутствие поля ядро атома находится в центре электронной оболочки, поэтому $\vec{d} = 0$. Внешнее электрическое поле сдвигает электронную оболочку относительно ядра, создавая дипольный момент $\vec{d} = \alpha \vec{\mathcal{E}}$, где α — поляризуемость. Таким образом, в каждый момент времени t атом находится в переменном потенциале

$$\tilde{U}(t) = -\frac{1}{2} \vec{d}(t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(t) = -\frac{\alpha}{2} \left(\vec{\mathcal{E}}(t) \right)^2. \quad (2.12)$$

Усреднив $\tilde{U}(t)$ по времени, найдём консервативную часть потенциала:

$$U(\vec{x}) = \langle \tilde{U}(t) \rangle_t = -\frac{\alpha}{2} \left\langle \left(\vec{\mathcal{E}}(t) \right)^2 \right\rangle_t = -\frac{2\pi\alpha}{c} I(\vec{x}), \quad (2.13)$$

где $I(\vec{x})$ распределение интенсивности электромагнитного поля. При $\alpha > 0$ максимум интенсивности является минимумом дипольного потенциала и точкой притяжения для облака атомов.

В эксперименте пленяющее поле $\vec{\mathcal{E}}(t)$ создаётся лучом лазера на CO_2 с длиной волны 10,6 мкм, которая много больше длин волн электродипольных переходов. Наиболее интенсивные переходы из основного состояния $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{3/2}$ и $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$ происходят на длине волны 671 нм. Эти же переходы обладают наибольшей длиной волны. Поле $\vec{\mathcal{E}}(t)$ изменяется медленно относительно периодов электродипольных переходов. Для атома поле лазера $\vec{\mathcal{E}}(t)$ выглядит как статическое, электрический дипольный момент индуцируется вдоль поля, и, следовательно, область наибольшей интенсивности является минимумом потенциала. Потенциал $\tilde{U}(t)$ может рассматриваться как консервативный ($\tilde{U}(t) \approx U$) на временах $\ll 1$ часа, поскольку электродипольные переходы под действием высокочастотной части потенциала $\tilde{U}(t)$ происходят один раз в час при характерных значениях поля [75]. Малая вероятность перехода объясняется большой отстройкой между частотой лазера и частотой перехода $2S \rightarrow 2P$.

При вычислении дипольного потенциала $U(\vec{x})$ может быть использована статическая поляризуемость лития, которая составляет $\alpha_{\text{стат.}} = 24,3 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ [76]. Пленяющий потенциал одинаков для атомов в состояниях $|1\rangle - |6\rangle$ поскольку зависит лишь от свойств электронного облака, но не от спиновых переменных.

Ловушки двух типов использовались в данной работе:

- веретенообразная, показанная на рисунке 2.3;
- серия дископодобных ловушек, образованных пучностями стоячей волны.

Первая использовалась для исследования 3-мерного газа, а вторая — для приготовления кинематически 2-мерного газа. В следующих двух подразделах параметры пленяющих потенциалов $U(\vec{x})$ рассчитаны через параметры оптической системы, создающей ловушку.

2.4.2 Веретенообразный потенциал

Рассмотрим дипольную ловушку, образованную фокусом бегущей волны. Волна распространяется вдоль z и фокусируется в плоскости $z = 0$. Распределение интенсивности в луче

$$I(\rho, z) = \frac{I_0}{1 + z^2/z_p^2} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2(1+z^2/z_p^2)}}, \quad (2.14)$$

где $z_p \equiv k_L w_0^2$ — релеевская³⁾ длина, $k_L = 2\pi/(10,6 \text{ мкм})$ — волновой вектор инфракрасного излучения, а w_0 — радиус луча в фокусе по уровню интенсивности $1/e$. Луч мощности P сфокусирован линзой с фокусным расстоянием F . Радиус луча на линзе по уровню интенсивности $1/e$ обозначим b . Часть параметров луча можно выразить друг через друга:

$$w_0 = \frac{F}{k_L b}, \quad P = \int_0^{+\infty} I(\vec{x}) 2\pi \rho d\rho = \pi w_0^2 I_0. \quad (2.15)$$

Согласно формуле (2.13), профиль потенциала повторяет распределение интенсивности и имеет форму веретена:

$$U(\rho, z) = -\frac{U_0}{1 + z^2/z_p^2} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2(1+z^2/z_p^2)}}. \quad (2.16)$$

³⁾John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842–1919

Глубина потенциала

$$U_0 = \frac{2\pi\alpha_{\text{стат.}}}{c} I_0 = \frac{2\alpha_{\text{стат.}} k_{\text{л}}^2}{c} \frac{P b^2}{F^2}. \quad (2.17)$$

При $U(\rho, z) \ll U_0$ потенциал близок к гармоническому:

$$U(\rho, z) \approx U_0 \left(\frac{\rho^2}{w_0^2} + \frac{z^2}{z_{\text{п}}^2} \right) = \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}. \quad (2.18)$$

Для записи последней формулы ноль потенциальной энергии был сдвинут на U_0 вниз. Частоты могут быть вычислены через фокусное расстояние линзы, мощность и радиус луча:

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{2U_0}{mw_0^2}} = \frac{2k_{\text{л}}^2 b^2}{F^2} \sqrt{\frac{\alpha_{\text{стат.}} P}{mc}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2U_0}{mz_{\text{п}}^2}} = \frac{b}{F} \omega_{\perp}. \quad (2.19)$$

И наоборот, зная частоты, которые измеримы напрямую (раздел 3.4 на страницах 68–70), можно рассчитать глубину

$$U_0 = \frac{m\omega_{\perp}^4}{2k_{\text{л}}^2 \omega_z^2}. \quad (2.20)$$

2.4.3 Серия дископодобных потенциалов

Рассмотрим серию дипольных ловушек, образующихся в фокусе стоячей волны. Пленение атомов в пучностях стоячей волны схематично показано на рисунке 2.4. Стоячая

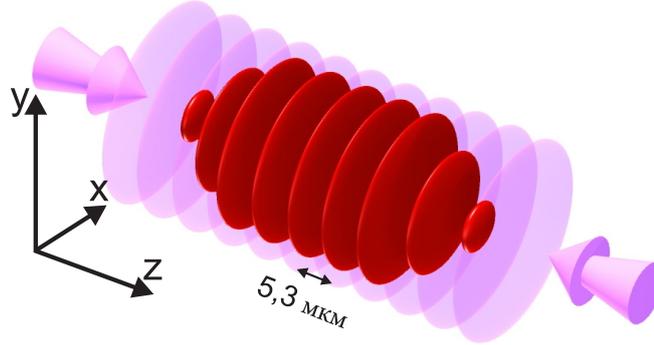


Рисунок 2.4 — Пленение атомов пучностями стоячей волны. Облака атомов показаны тёмнокрасным, а распределение интенсивности света — светлосиреневым.

волна появляется в результате интерференции 2 волн, бегущих навстречу друг другу в направлениях $+z$ и $-z$ соответственно и обладающих одинаковой поляризацией. Волны фокусируются в плоскости $z = 0$. Для каждой волны мощность равна P , а интенсивность в фокусе — I_0 . Распределение интенсивности в стоячей волне

$$I(\rho, z) = \frac{I_0}{1 + z^2/z_{\text{п}}^2} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2(1+z^2/z_{\text{п}}^2)}} 4 \cos^2 k_{\text{л}} z. \quad (2.21)$$

Потенциал, создаваемый стоячей волной, имеет глубину $4U_0$, то есть вчетверо больше потенциала от одиночного луча. В пучностях, в том числе вблизи начала координат, потенциал близок к гармоническому:

$$U(\rho, z) \approx 4U_0 \left(k_{\text{л}}^2 z^2 + \frac{\rho^2}{w_0^2} \right) = \frac{m\omega_z^2 z^2}{2} + \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2}. \quad (2.22)$$

Частоты могут быть выражены через другие параметры:

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{8U_0}{m\omega_0^2}} = \frac{4k_{\perp}^2 b^2}{F^2} \sqrt{\frac{\alpha_{\text{стат.}} P}{mc}}, \quad \omega_z = k_{\text{л}} \sqrt{\frac{8U_0}{m}} = \frac{F}{b} \omega_{\perp}. \quad (2.23)$$

Потенциалы, создаваемые стоячими волнами называют оптическими решётками. Запишем формулу потенциала через параметры, традиционно используемые для оптических решёток — энергию отдачи фотона решётки $E_{\text{отдачи}} = \hbar^2 k_{\text{л}}^2 / 2m$ и безразмерную глубину потенциала $s = 4U_0 / E_{\text{отдачи}}$. Потенциал запишем в области $z \ll z_{\text{р}}$, пренебрегая расходимостью луча и отбрасывая члены $z/z_{\text{р}}$ в формуле (2.21):

$$U(\vec{x}) = s E_{\text{отдачи}} \left(1 - \exp\left(-\frac{m\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2)}{2s E_{\text{отдачи}}}\right) \cos^2 k_{\text{л}} z \right). \quad (2.24)$$

Безразмерная глубина может быть выражена через аксиальную частоту:

$$s = \left(\frac{\hbar \omega_z}{2E_{\text{отдачи}}} \right)^2. \quad (2.25)$$

2.4.4 Сравнение оптической и магнитной ловушки

Альтернативный инструмент пленения — это магнитная ловушка, удерживающая атом постоянным магнитным полем за счёт потенциала

$$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (2.26)$$

где $\vec{\mu}$ магнитный дипольный момент атома. Для щелочных металлов магнитный дипольный момент определяется состоянием спина валентного электрона. Техническим преимуществом магнитной ловушки является больший объём в сравнении с оптической ловушкой. Это позволяет перегрузить большее число атомов из магнито-оптической ловушки.

Применительно к экспериментам с литием-6 магнитная ловушка обладает двумя недостатками. Во-первых, она избирательна к спиновым состояниям атома. В ловушке могут быть пленены лишь состояния, энергия которых повышается с увеличением магнитного поля, поскольку в свободном от источников пространстве возможны лишь минимумы магнитного поля, но не максимумы. В результате, например, в магнитной ловушке не может быть приготовлена смесь состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$, которая является наиболее устойчивой к неупругим столкновениям (подраздел 2.6.7). Во-вторых, магнитное поле перестаёт быть свободным параметром и не может быть использовано для управления межчастичным взаимодействием (подраздел 2.6.5).

2.5 Идеальный ферми-газ в параболическом потенциале

Термодинамические свойства идеального ферми-газа в параболическом потенциале могут быть рассчитаны. Эта задача интересна по нескольким причинам. Во-первых, измерения над идеальным ферми-газом и сверка с теорией служат проверке экспериментальных методов. Во-вторых, часть свойств сильновзаимодействующего ферми-газа напоминает свойства идеального газа. Например, энергия основного состояния сильновзаимодействующего ферми-газа выражается через энергию идеального ферми-газа и универсальный коэффициент β (подраздел 2.7.2 на странице 48).

В этом разделе приведены расчёты для идеального ферми-газа частиц в одном спиновом состоянии, помещённых в параболический потенциал

$$U(\vec{x}) = \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}. \quad (2.27)$$

Сделано квазиклассическое предположение Томаса⁴⁾—Ферми о том, что уровни энергии лежат достаточно плотно, то есть суммирование по состояниям осциллятора можно заменить интегрированием. В приложении А выполнены более общие расчёты для дископодобного потенциала, без замены суммирования интегрированием для состояний движения вдоль направления наиболее плотного удержания. Эти расчёты позволяют проследить переход от 3-мерной к 2-мерной кинематике газа в сильноанизотропном дископодобном потенциале.

Предполагается, что газ находится в термодинамическом равновесии. Квантовое состояние с координатой \vec{x} и импульсом \vec{k} занимает фазовый объём $d^3\vec{x} d^3\vec{k} = (2\pi)^3$ и заполнено с вероятностью

$$n_{\vec{x}, \vec{k}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2mT} + \frac{U(\vec{x})}{T} - \frac{\mu(T)}{T}\right) + 1}, \quad (2.28)$$

где μ — глобальный химический потенциал газа, который может быть найден из уравнения на число частиц

$$N = \int \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2mT} + \frac{U(\vec{x})}{T} - \frac{\mu(T)}{T}\right) + 1} \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (2.29)$$

Значение химического потенциала при нулевой температуре называют глобальной энергией Ферми E_Φ . При $T = 0$ числа заполнения $n_{\vec{x}, \vec{k}}$ равны 1 для состояний с энергиями $< E_\Phi$ и нулю для состояний с бóльшими энергиями. При $T = 0$ из уравнения (2.29) находим

$$E_\Phi = \hbar(\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} (6N)^{1/3}. \quad (2.30)$$

Профиль плотности получается интегрированием чисел заполнения (2.28) по пространству импульсов. При $T = 0$ находим

$$\begin{aligned} n_{\text{осн. ид.}}(\vec{x}) &= \int_{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + U(\vec{x}) < E_\Phi} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{2mE_\Phi}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{R_i^2}\right)^{3/2}, & \text{при } x_i < R_i, \\ 0, & \text{при } x_i > R_i, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $R_i \equiv \sqrt{2E_\Phi/m\omega_i^2}$ — радиус Томаса—Ферми в i -м направлении. Глобальная энергия Ферми E_Φ совпадает с локальной энергией Ферми, $\varepsilon_\Phi = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi^2 n)^{2/3}$, в центре ловушки при $T = 0$.

Энергия основного состояния газа может быть вычислена интегрированием по заполненным состояниям

$$E_{\text{осн. ид.}} = \int_{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + U(\vec{x}) < E_\Phi} \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + U(\vec{x})\right) \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{3}{4} N E_\Phi. \quad (2.32)$$

⁴⁾Llewellyn Hilleth Thomas, 1903–1982

При конечных температурах интеграл в уравнении (2.29) также берётся, и уравнение на величину химического потенциала μ преобразуется к виду

$$1 = -6 \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^3 \text{Li}_3(-e^{\mu/T}), \quad (2.33)$$

где Li_{ν} — полилогарифмическая функция ν -того порядка, определённая рядом

$$\text{Li}_{\nu}(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\nu}}. \quad (2.34)$$

Зависимость химического потенциала от температуры показана на рисунке 2.5а. И хими-

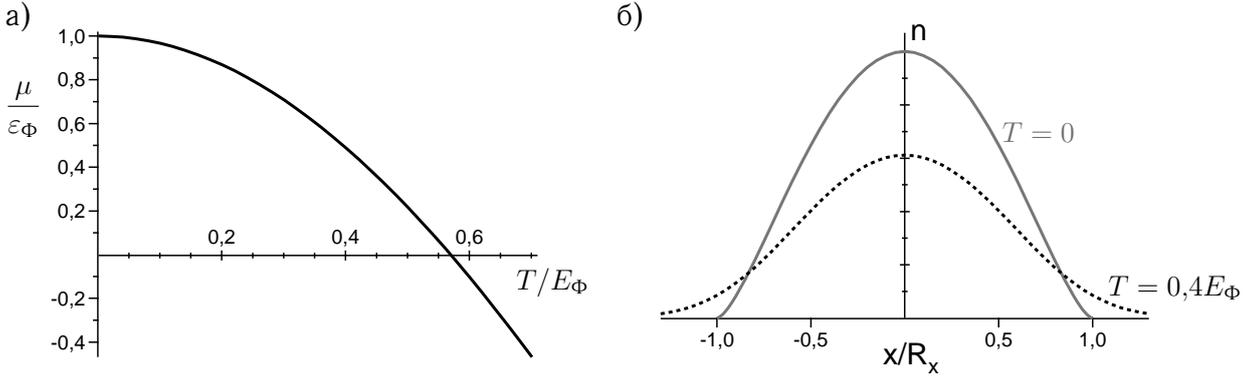


Рисунок 2.5 — а) Зависимость химического потенциала от температуры. б) Распределение плотности $n(\vec{x})$ при двух различных температурах, вдоль линии $y, z = 0$. Вертикальная шкала — в произвольных единицах.

ческий потенциал, и температура нормированы на энергию Ферми E_{Φ} , поскольку последняя является естественным масштабом для всех энергетических величин. При $T \ll E_{\Phi}$ температурная зависимость химического потенциала может быть приближена выражением

$$\mu \approx \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^2 \right) E_{\Phi}. \quad (2.35)$$

Энергия при произвольной температуре

$$E_{\text{полн. ид.}} = -24 \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^4 E_{\text{осн. ид.}} \text{Li}_4(-e^{\mu/T}). \quad (2.36)$$

При малых температурах снова возможно квадратичное разложение по T/E_{Φ} :

$$E_{\text{полн. ид.}} \approx \left(1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^2 \right) E_{\text{осн. ид.}}. \quad (2.37)$$

Профиль плотности при конечной температуре

$$n(\vec{x}) = - \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \text{Li}_{3/2}(-e^{\mu/T - U(\vec{x})/T}). \quad (2.38)$$

Это распределение называют профилем Томаса–Ферми. На рисунке 2.5б показано распределение плотности при двух различных температурах. Можно видеть, что форма

распределения существенно зависит от температуры. При $T \sim E_F$ распределение похоже на гауссову⁵⁾ функцию, то есть на профиль плотности классического газа. При $T \ll E_F$ края распределения существенно более резкие. Зависимость формы распределения от температуры открывает возможность термометрии ферми-газа, которая продемонстрирована в разделе 3.5 на странице 70.

2.6 Парные межатомные взаимодействия

2.6.1 Природа взаимодействия

Движение двух взаимодействующих атомов в вакууме в наиболее общем виде подчиняется гамильтониану

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r}_1 - \hat{r}_2). \quad (2.39)$$

Замена переменных

$$\hat{R} = \frac{\hat{r}_1 + \hat{r}_2}{2}, \quad \hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2, \quad (2.40)$$

$$\hat{r} = \hat{r}_1 - \hat{r}_2, \quad \hat{p} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{2} \quad (2.41)$$

позволяет разделить задачу на движение центра масс пары (операторы \hat{R} и \hat{P}) и на рассеяние частицы приведённой массы $m/2$ (операторы \hat{r} и \hat{p}). Этим двум процессам отвечает соответственно первое и второе слагаемое гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2(2m)} + \left(\frac{\hat{p}^2}{2(m/2)} + \hat{V}(\hat{r}) \right). \quad (2.42)$$

Далее рассматривается задача об относительном движении, отвечающая второму слагаемому.

Взаимодействие двух атомов в наиболее общем виде описывается оператором

$$\hat{V}(\hat{r}) = \hat{V}_u(\hat{r}) + \hat{V}_d(\hat{r}), \quad (2.43)$$

где первое слагаемое $\hat{V}_u(\hat{r})$ — центрально-симметричный потенциал, возникающий из-за электростатического взаимодействия ядер и электронов, а второе слагаемое $\hat{V}_d(\hat{r})$ — диполь-дипольное взаимодействие магнитных моментов атомов.

Основную роль играет электростатический потенциал $\hat{V}_u(\hat{r})$, на фоне которого можно пренебречь диполь-дипольным взаимодействием, как будет показано в подразделе 2.6.3. Ввиду малости кинетической энергии рассеяние существенно лишь для парциальных волн с угловым моментом $l = 0$ (s -волн), кроме случаев резонансов парциальных волн с $l > 0$. Длина s -волнового рассеяния a произвольно перестраивается внешним магнитным полем (подраздел 2.6.5).

Из рассмотрения можно исключить размер электростатического потенциала r_0 , удовлетворив условию $|a| \gg r_0$. В этом случае отношение a к межчастичному расстоянию $L = n^{-1/3}$ становится единственным параметром взаимодействия. То есть для описания рассеяния и коллективных свойств не важны детали взаимодействия, такие как, например, форма потенциала и даже тип ферми-частицы. С точки зрения коллективных свойств газ

⁵⁾Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

атомов ведёт себя как система любых других ферми-частиц с таким же отношением a/L . Простота в описании взаимодействия открывает возможность моделирования других ферми-систем и проверки теорий этих систем.

В теоретическом анализе атомной системы реальный межатомный потенциал часто заменяют более простым потенциалом, дающим такую же длину рассеяния a в первом приближении Борна⁶⁾,

$$V_{\text{ц}}(\hat{r}) = \frac{4\pi\hbar a}{m} \delta(\hat{r}), \quad (2.44)$$

или регуляризованной версией этого потенциала, которая позволяет избежать расходимости в следующих порядках теории возмущений (раздел 2.6.6).

2.6.2 Преобладание s -волнового рассеяния в электростатическом потенциале

Электростатический потенциал $\hat{V}_{\text{ц}}(\hat{r})$ появляется в результате взаимодействия 4 частиц: двух валентных электронов и двух однозарядных ионов. Каждый из ионов образован ядром и заполненной электронной оболочкой $1s^2$. Потенциал зависит от спинового состояния валентных электронов. Взаимодействие между различными спиновыми состояниями ведёт к появлению резонансов Фешбаха и позволяет перестраивать длину рассеяния (подраздел 2.6.5). В настоящем подразделе рассеяние рассматривается без учёта спиновых степеней свободы. Основная цель подраздела — обоснование учёта рассеяния лишь парциальных волн с орбитальным моментом импульса $l = 0$. Поэтому полагаем, что $\hat{V}_{\text{ц}}(\hat{r}) = V_{\text{ц}}(\hat{r})$ в этом разделе.

Характерный вид электростатического потенциала показан на рисунке 2.6а. На близ-

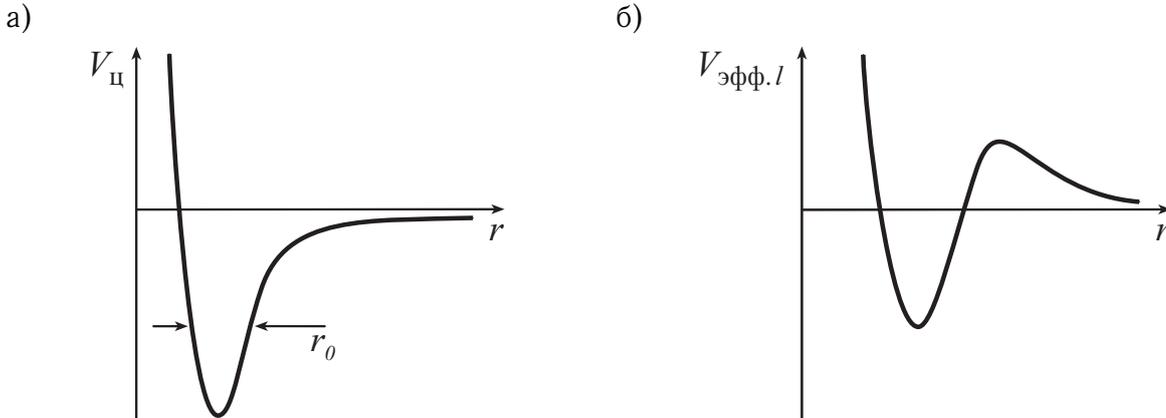


Рисунок 2.6 — а) Потенциал межчастичного взаимодействия. б) Эффективный потенциал для парциальной волны с $l > 0$.

ких расстояниях потенциал расталкивающий из-за отталкивания ионов. Взаимодействие на дальних расстояниях — это ван-дер-ваальсово⁷⁾ притяжение

$$\hat{V}_{\text{ц}}(\hat{r}) \Big|_{r \gg r_0} \approx -\frac{C_6}{\hat{r}^6}. \quad (2.45)$$

Для атомов лития в системе сгс $C_6 = 1400 - 1500 e^2 a_{\text{Б}}^5$ [77, 78, 79], где e — заряд электрона, а $a_{\text{Б}} = \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус. Характерный размер, на котором происходит достаточно быстрое изменение потенциала $r_0 \approx 5$ Бор.

⁶⁾Max Born, 1882–1970

⁷⁾Johannes Diderik van der Waals, 1837–1923

Волновая функция рассеивающейся пары частиц на расстояниях $r \gg r_0$ представима в виде

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right). \quad (2.46)$$

Ось z выберем вдоль направления \vec{k} , тогда угол θ равен углу между волновым вектором падающей волны \vec{k} и волновым вектором \vec{k}' рассеянной волны, наблюдаемой в точке \vec{r} . Ввиду инвариантности по отношению к произвольному повороту вокруг оси z получаем упрощение — $f(\theta, \varphi) = f(\theta)$.

Волновая функция может быть разложена по сферическим шаровым гармоникам. При $\vec{z}_0 \uparrow \vec{k}$ в разложение входят лишь шаровые функции с нулевой проекцией⁸⁾:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l Y_{l0}(\theta) \frac{\chi_{kl}(r)}{r}, \quad (2.47)$$

где c_l — коэффициенты разложения, а радиальные функции $\chi_{kl}(r)$ подчиняются одномерному уравнению Шрёдингера⁹⁾

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2(m/2)} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2(m/2)r^2} + V_{\text{ц}}(r) \right] \chi_{kl}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2(m/2)} \chi_{kl}(r) \quad (2.48)$$

с граничным условием $\chi_{kl}(0) = 0$. Полная амплитуда рассеяния $f(\theta)$ может быть разложена по парциальным волнам с амплитудами рассеяния f_l :

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta). \quad (2.49)$$

Потенциал $V_{\text{ц}}(r)$, ввиду шаровой симметрии, не изменяет орбитальный момент l , то есть каждая шаровая парциальная волна рассеивается не зависимо от других парциальных волн.

При анализе рассеяния с малой энергией можно ограничиться учётом конечного числа парциальных волн, если рассеяние на малые углы не приводит к расходимости амплитуды $f(\theta)$. Рассеяние на малые углы неважно, если потенциал спадает быстрее чем $1/r^3$ ([80], §124, §132). Покажем это, вычислив амплитуду рассеяния для потенциала $-C_3/r^3$ в первом борновском приближении. Борновское приближение применимо в области, где выполняется неравенство $C_3/r^3 \ll \hbar^2/mr^2$, то есть в области больших r ($r > r_{\text{min}}$). Именно в этой области происходит рассеяние парциальных волн с большими орбитальными моментами. В выбранной системе координат $\vec{z}_0 \uparrow \vec{k}$ получаем:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2(m/2)}{\hbar^2} (2\pi)^3 \left\langle \vec{k}' \left| \frac{-C_3}{r^3} \right| \vec{k} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2(m/2)}{\hbar^2} \int_{r>r_{\text{min}}} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}'} \frac{-C_3}{r'^3} d^3r' = \frac{mC_3}{\hbar^2} \int_{r_{\text{min}}|\vec{k}-\vec{k}'|}^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Этот интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе для рассеяния под малыми углами $\theta \approx 0$:

$$f^{(1)}(\theta) \Big|_{\theta \ll 1} = \frac{mC_3}{\hbar^2} \ln r_{\text{min}} k \theta. \quad (2.51)$$

⁸⁾ $Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$, где $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l}$ — l -й полином Лежандра (Adrien-Marie Legendre, 1752–1833).

⁹⁾ Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887–1961

Потенциал $V_{\text{ц}}(r)$ вдалеке спадает как $1/r^6$, поэтому для него рассеяние под малыми углами несущественно. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь конечное число парциальных волн. Амплитуда рассеяния s -волны ([80], §133),

$$f_0 = \frac{1}{-ik - 1/a + k^2 r_0/2}, \quad (2.52)$$

стремится к конечному пределу $-a$ при $k \rightarrow 0$. В газе атомов лития длина рассеяния a может варьироваться экспериментатором в произвольных пределах (подраздел 2.6.5).

Рассеянием парциальных волн с орбитальным моментом $l > 0$ можно пренебречь, поскольку потенциал $V_{\text{ц}}(r)$ экранирован центробежным потенциалом $\hbar^2 l(l+1)/m$. Рассеяние соответствует движению в эффективном потенциале

$$V_{\text{эфф.}l}(r) = V_{\text{ц}}(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2(m/2)r^2}, \quad (2.53)$$

показанном на рисунке 2.6б. Максимум эффективного потенциала находится в точке

$$r_{\text{max}}(l) = a_{\text{Б}} \sqrt{\frac{6 C_6}{e^2 a_{\text{Б}}^5} \frac{m/2}{m_e l(l+1)}}, \quad (2.54)$$

что, например, для p -волны составляет 80 Бор. Высота барьера для p -волн равна 3 мК, что на несколько порядков больше кинетической энергии атомов, равной 0,1–10 мК. Таким образом, для парциальных волн с $l > 0$ эффективный потенциал практически не отличим от потенциала свободного пространства и, следовательно, длина рассеяния мала, кроме случаев резонансного рассеяния. Необходимое условие пренебрежения парциальными волнами с ненулевым моментом $kr_0 \ll 1$ позволяет пренебречь величиной $k^2 r_0/2$ в знаменателе формулы (2.52).

В результате, с высокой точностью

$$f(\theta) = f_0 = \frac{1}{-ik - 1/a}. \quad (2.55)$$

В случае, когда длина рассеяния мала по сравнению с длиной волны Дебройля¹⁰⁾ $1/k$, амплитуда и полное сечение рассеяния σ не зависят от импульса:

$$f \approx -a, \quad \sigma = 4\pi a^2. \quad (2.56)$$

Если $k \gg 1/|a|$, то амплитуда и сечение рассеяния определяются импульсом:

$$f \approx \frac{i}{k}, \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2}. \quad (2.57)$$

Физически это можно понять так, что при лобовых столкновениях частица не может быть больше волны Дебройля. Формулы (2.57) известны как унитарный предел амплитуды и сечения s -волновых столкновений.

2.6.3 Пренебрежение диполь-дипольным взаимодействием

Взаимодействие магнитных дипольных моментов двух атомов возможно благодаря взаимодействию электрон-электрон, электрон-ядро и ядро-ядро. Последние два взаимодействия малы по сравнению с первым. Учтём лишь взаимодействия между спинами валентных электронов

$$\hat{V}_{\text{д}}(\hat{r}) = \frac{\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2}{\hat{r}^3} - \frac{3(\hat{\mu}_1 \cdot \hat{r})(\hat{\mu}_2 \cdot \hat{r})}{\hat{r}^5} - \frac{8\pi}{3} \hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2 \delta(\hat{r}), \quad (2.58)$$

¹⁰⁾Louis Victor de Broglie, 1892–1987

где $\hat{\mu}_i = -g_S \mu_B \hat{S}_i \approx -2\mu_B \hat{S}_i$ — оператор магнитного момента i -го электрона. Оценим амплитуду рассеяния с помощью первого борновского приближения.

Сначала рассчитаем вклад последнего слагаемого, содержащего δ -функцию. Модуль амплитуды рассеяния под действием этого слагаемого в первом борновском приближении в случае $\hat{\mu}_1 \parallel \hat{\mu}_2$ равен

$$|f^{(1)}| = \frac{2m}{3\hbar^2} (g_S \mu_B)^2 = a_B \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{m}{m_e} \frac{g_S^2}{6} = 0,3 a_B. \quad (2.59)$$

Можно видеть, что амплитуда рассеяния меньше, чем размер электростатического потенциала $r_0 = 5$ Бор. В результате, пренебрегаем последним слагаемым потенциала (2.58) в сравнении с электростатическим взаимодействием.

Для того, чтобы оценить роль первых двух слагаемых потенциала (2.58), выразим их через неприводимые сферические тензоры. И в спиновом, и в координатном пространстве ранг оператора $\hat{V}_d + \frac{8\pi}{3} \hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2 \delta(\vec{r})$ равен 2:

$$\hat{V}_d(\vec{r}) + \frac{8\pi}{3} \hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2 \delta(\vec{r}) = -\frac{(g_S \mu_B)^2}{\hat{r}^3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \sum_{q=-2}^2 (-1)^q Y_{2q}(\hat{r}) \hat{T}_{2,-q}(\hat{S}_1, \hat{S}_2), \quad (2.60)$$

где Y_{lq} — шаровые функции¹¹⁾, а $\hat{T}_{2q}(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ — q -ая проекция неприводимого сферического тензора 2-го ранга, составленного из операторов \hat{S}_1 и \hat{S}_2 :

$$\hat{T}_{2,\pm 2} = (\hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y})(\hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y}) = \hat{S}_{1\pm} \hat{S}_{2\pm}, \quad (2.61)$$

$$\hat{T}_{2,\pm 1} = \mp (\hat{S}_{1z}(\hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y}) + \hat{S}_{2z}(\hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y})) = \mp (\hat{S}_{1z} \hat{S}_{2\pm} + \hat{S}_{1\pm} \hat{S}_{2z}), \quad (2.62)$$

$$\hat{T}_{2,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} (3\hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z} - \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) = \frac{4\hat{S}_{1z} \hat{S}_{2z} - \hat{S}_{1+} \hat{S}_{2-} - \hat{S}_{1-} \hat{S}_{2+}}{\sqrt{6}}. \quad (2.63)$$

Амплитуда рассеяния под действием q -го слагаемого потенциала (2.60) в первом борновском приближении равна

$$f_q^{(1)}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2(m/2)}{\hbar^2} (2\pi)^3 \left\langle \vec{k}' \left| -\frac{(g_S \mu_B)^2}{\hat{r}^3} \sqrt{\frac{6\pi}{5}} (-1)^q Y_{2q}(\hat{r}) \right| \vec{k} \right\rangle \times \left\langle \text{кон.} \left| \hat{T}_{2,-q} \right| \text{нач.} \right\rangle, \quad (2.64)$$

где $\langle \text{кон.} | \hat{T}_{2,-q} | \text{нач.} \rangle$ — матричный элемент перехода между начальным и конечным внутренним состоянием пары, а $\hbar \vec{k}'$ — импульс рассеянной волны. Вектор \vec{k}' направлен под углами (θ, φ) . По модулю \vec{k}' в общем случае не совпадает с \vec{k} , так как изменение спинового состояния пары может приводить к смене энергии (подраздел 2.6.7). В силу определения тензора $\hat{T}_{2,q}$ справедливо неравенство

$$\left| \left\langle \text{кон.} \left| \hat{T}_{2,-q} \right| \text{нач.} \right\rangle \right| \leq 1. \quad (2.65)$$

Поэтому для оценки амплитуды рассеяния $f_q^{(1)}(\theta, \varphi)$ сверху достаточно рассчитать матричный элемент по пространственным состояниям:

$$\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \left\langle \vec{k}' \left| \frac{Y_{2q}(\hat{r})}{\hat{r}^3} \right| \vec{k} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}'} \frac{Y_{2q}(\vec{r}')}{r'^3} d^3 r'. \quad (2.66)$$

¹¹⁾Проекции шаровых функций 2-го ранга: $Y_{2,\pm 2}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2}$, $Y_{2,\pm 1}(\vec{r}) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x \pm iy)}{r^2}$ и $Y_{2,0}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right)$.

Для взятия интеграла разложим плоскую волну по сферическим гармоникам ([81], §7.5):

$$e^{i\vec{z}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(zr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vec{r}) Y_{lm}(\vec{z}), \quad (2.67)$$

где j_l — сферическая функция Бесселя¹²⁾ l -го порядка. Подставив эту формулу в интеграл (2.66), найдём

$$\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \left\langle \vec{k}' \left| \frac{Y_{2,q}(\hat{r})}{\hat{r}^3} \right| \vec{k} \right\rangle = -Y_{2q}(\vec{k} - \vec{k}') \int_0^{\infty} \frac{j_2(|\vec{k} - \vec{k}'|r')}{r'^3} r'^2 dr' = -\frac{Y_{2q}(\vec{k} - \vec{k}')}{3}. \quad (2.68)$$

В итоге амплитуда рассеяния под действием q -го слагаемого потенциала (2.60) преобразуется к виду

$$f_q^{(1)}(\theta, \varphi) = -(-1)^q \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \frac{(g_S \mu_B)^2 m}{\hbar^2} Y_{2q}(\vec{k} - \vec{k}') \left\langle \text{кон.} \left| \hat{T}_{2,-q} \right| \text{нач.} \right\rangle, \quad (2.69)$$

откуда следует, что

$$|f_q^{(1)}(\theta, \varphi)| \leq \frac{(g_S \mu_B)^2 m}{\sqrt{6} \hbar^2} = a_B \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{m}{m_e} \frac{g_S^2}{4\sqrt{6}} = 0,2 a_B. \quad (2.70)$$

Амплитуда рассеяния снова меньше, чем размер электростатического потенциала $r_0 = 5$ Бор. Таким образом, в газе атомов лития диполь-дипольным взаимодействием можно пренебречь в сравнении с электростатическим взаимодействием.

Диполь-дипольный потенциал спадает с расстоянием, как $1/r^3$. Однако амплитуда рассеяния на нём не расходится на нижнем пределе интегрирования в отличие от амплитуды рассеяния на сферически симметричном потенциале $-C_3/r^3$, рассмотренном в подразделе 2.6.2. Расходимость отсутствует, поскольку потенциал $\hat{V}_d(\hat{r})$ анизотропен и не содержит сферически симметричных слагаемых.

2.6.4 Роль ферми-статистики в рассеянии

Атомы подчиняются статистике Ферми–Дирака, поэтому состояние пары атомов должно менять знак при перестановке двух частиц. Для удовлетворения этому требованию состояние пары должно быть симметризовано.

Допустим пространственные и спиновые переменные пары атомов разделимы, тогда несимметризованное состояние можно описать произведением волновой функции на спиновую часть:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) |\alpha\rangle |\beta\rangle, \quad (2.71)$$

где первый по порядку вектор $|\dots\rangle$ описывает состояние первого атома, следующий — второго, а пространственная часть состояния имеет вид (2.46). Для упругих столкновений в ненулевом магнитном поле допущение о разделимости пространственных и спиновых переменных справедливо. В симметризованном состоянии пространственная и спиновая часть должны иметь противоположную чётность при перестановке атомов. Допустимое симметричное/антисимметричное состояние пространственной части имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{c/a}(\vec{r}) &= \frac{\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \pm \psi_{\vec{k}}(-\vec{r})}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \pm e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{i\vec{k}r}}{r} \frac{f(\theta, \varphi) \pm f(\pi - \theta, \pi + \varphi)}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

¹²⁾Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846

При s -волновых столкновениях, которые доминируют в рассматриваемой системе, $f(\theta, \varphi) = f_0$, следовательно,

$$f_c = \sqrt{2}f_0, \quad f_a = 0. \quad (2.73)$$

Таким образом, пара частиц, находящихся в симметричном спиновом состоянии, не может сталкиваться в s -волновом канале, поскольку для такой пары волновая функция должна быть антисимметрична. Отсюда, в частности, следует невозможность s -волнового рассеяния для газа, состоящего из атомов только в одном внутреннем состоянии $|\alpha\rangle$, так как спиновое состояние пары в этом случае всегда симметрично, $|\alpha\rangle|\alpha\rangle$.

Единственно возможное спиновое состояние пары, взаимодействующей в s -волновом канале, — это синглетное состояние

$$|\{\alpha, \beta\}_-\rangle = \frac{|\alpha\rangle|\beta\rangle - |\beta\rangle|\alpha\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.74)$$

Полное симметризованное состояние пары имеет вид

$$\psi_c(\vec{r})|\{\alpha, \beta\}_-\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_0 \sqrt{2} \right) |\{\alpha, \beta\}_-\rangle. \quad (2.75)$$

Полное сечение рассеяния в этом состоянии в два раза больше, чем в несимметризованном состоянии (2.71),

$$\sigma = 8\pi|f_0|^2 \quad (2.76)$$

вместо $\sigma = 4\pi|f_0|^2$. В некогерентной смеси атомов в состояниях $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ половина пар атомов находится в антисимметричном спиновом состоянии $|\{\alpha, \beta\}_-\rangle$ и взаимодействует с сечением $\sigma = 8\pi|f_0|^2$, а половина пар атомов — в симметричном спиновом состоянии

$$|\{\alpha, \beta\}_+\rangle = \frac{|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\alpha\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.77)$$

и не взаимодействует. Так что, в среднем атомы рассеиваются друг на друге с тем же сечением, что и различные частицы — $\sigma = 4\pi|f_0|^2$.

2.6.5 Резонанс Фано–Фешбаха

В атомном газе существует уникальная для ферми-систем возможность управления взаимодействиями. Длина s -волнового рассеяния a может настраиваться на произвольное значение при помощи внешнего магнитного поля. Перестройка взаимодействия основана на явлении резонанса Фано¹³⁾–Фешбаха [82, 72], часто также называемом резонансом Фешбаха. Совпадение энергий свободного и связанного состояния пары частиц приводит к резонансу в длине и сечении рассеяния. В случае резонанса Фешбаха связанное и свободное состояние принадлежат к разным областям в пространстве внутренних (спиновых) состояний.

Прежде, чем рассмотреть резонанс Фешбаха, проиллюстрируем резонансное рассеяние более простым случаем. Рассмотрим медленное рассеяние пары частиц без внутренних степеней свободы. Резонанс, например, может быть легко рассчитан в задаче о медленном рассеянии на прямоугольном, центрально-симметричном потенциале, показанном на рисунке 2.7. Количественно эта задача рассмотрена в учебниках (например, [81], §7.7 и [80], §133). Для резонанса в рассеянии медленных частиц принципиально наличие связанного состояния вблизи 0 кинетической энергии. Если в потенциале есть связанное

¹³⁾Ugo Fano, 1912–2001

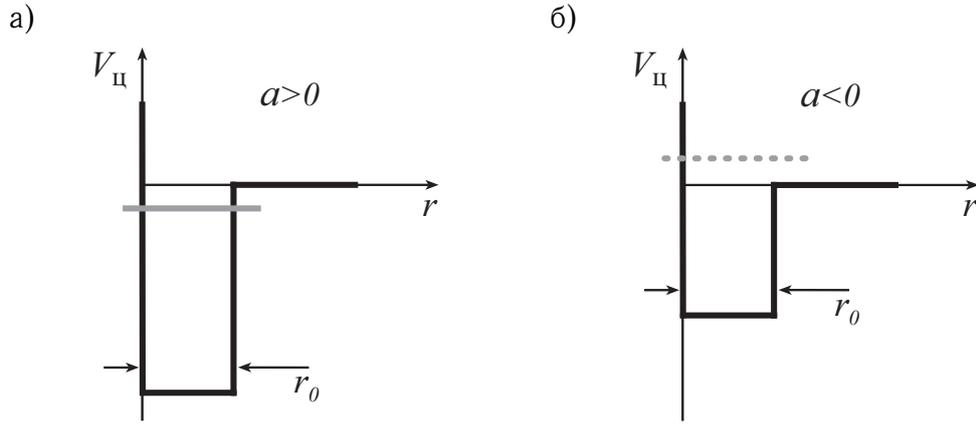


Рисунок 2.7 — Рассеяние в прямоугольном сферически симметричном потенциале. а) $a > 0$: связанное состояние вблизи нуля кинетической энергии. б) $a < 0$: если бы потенциал был чуть глубже, то образовалось бы связанное состояние.

состояние, лежащее вблизи нуля (рисунок 2.7а), то для медленных столкновений ($k \rightarrow 0$) длина рассеяния определяется не размером потенциала r_0 , а глубиной связанного состояния, которая $\approx \hbar^2/2ma^2$. При приближении энергии связанного состояния к 0 длина рассеяния a расходится к $+\infty$. Большая отрицательная длина рассеяния может быть получена, если у потенциала есть так называемый виртуальный уровень энергии выше нуля (рисунок 2.7б). То есть, если бы потенциал был чуть глубже, то сформировался бы связанный уровень.

В предыдущем примере и связанное, и свободное состояние пары отвечает одному и тому же внутреннему состоянию. Перестройка длины рассеяния a возможна лишь путём смены глубины потенциала (или r_0). Атомная физика на данный момент не имеет методов перестройки ни глубины, ни размера r_0 . Альтернативный метод перестройки длины рассеяния и резонанс Фешбаха оказались возможны благодаря наличию внутренних степеней свободы у пары частиц. Рассмотрим механизм резонанса Фано–Фешбаха.

Рассеяние двух атомов лития происходит вследствие электростатического взаимодействия между двумя однозарядными ионами и двумя валентными электронами. Валентные электроны — неразличимые частицы, поэтому спин пары находится либо в триплетном состоянии ($|S_\Sigma = 1\rangle$), либо в синглетном ($|S_\Sigma = 0\rangle$), а в общем случае — в суперпозиции этих двух состояний:

$$|\text{спин валентных электронов}\rangle = (\dots)|S_\Sigma = 1\rangle + (\dots)|S_\Sigma = 0\rangle. \quad (2.78)$$

В электронном триплетном и синглетном состоянии пара атомов взаимодействует с разными потенциалами, которые обозначим $V_\tau(r)$ и $V_c(r)$ соответственно. Оператор взаимодействия, таким образом, может быть записан как

$$\hat{V}_\Pi(\hat{r}) = V_\tau(\hat{r}) |S_\Sigma = 1\rangle\langle S_\Sigma = 1| + V_c(\hat{r}) |S_\Sigma = 0\rangle\langle S_\Sigma = 0|. \quad (2.79)$$

В триплетном состоянии пара обладает большим магнитным моментом $2\mu_B$. Это позволяет сдвигать потенциал триплетного канала по энергии при помощи однородного магнитного поля, используя энергию магнитного диполя

$$V_c(r) - V_\tau(r) \Big|_{r=\infty} \approx 2\mu_B B, \quad (2.80)$$

как показано на рисунке 2.8. Допустим пара атомов находится в свободном состоянии в триплетном потенциале, при почти нулевом импульсе. Синглетный канал для этих

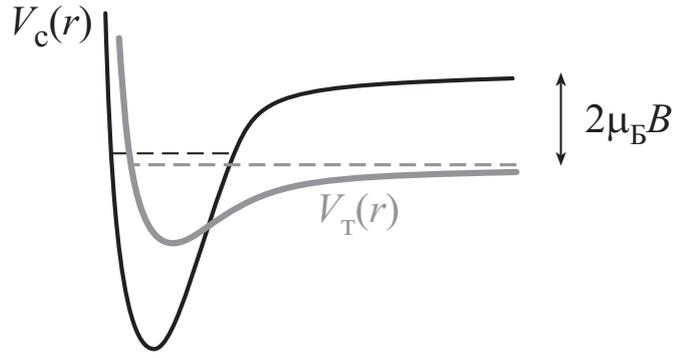


Рисунок 2.8 — Принцип резонанса Фано–Фешбаха: несвязанная пара частиц в триплетном канале (серый штрих) приходит в резонанс по энергии со связанным состоянием в синглетном канале (чёрный штрих). Взаимное расположение связанного и свободного состояния на данном рисунке соответствует $a < 0$.

атомов энергетически закрыт. Однако, если энергия несвязанной пары близка к энергии связанного состояния в синглетном канале (рисунок 2.8), то длина s -волнового рассеяния велика. А в случае точного резонанса и $k \rightarrow 0$ длина рассеяния расходится к ∞ . Резонанс подобен резонансу в одноканальной задаче, рассмотренной в начале данного подраздела. Разница лишь в том, что в одноканальной задаче подстраивается глубина потенциала, а в резонансе Фешбаха два потенциала сдвигаются друг относительно друга. Показанное на рисунке 2.8 взаимное расположение связанного и свободного состояния соответствует $a < 0$, как на рисунке 2.7б.

Для появления резонанса Фешбаха важно, что состояния с заданным спином пары валентных электронов не являются собственными. Если бы гамильтониан атома в магнитном поле (2.2) коммутировал с оператором спина электрона \hat{S}_z , то резонанса бы не было, поскольку задачи о рассеянии в триплетном и синглетном состоянии разделились бы. Однако благодаря сверхтонкому взаимодействию $\hbar a_{\text{св/т}} \hat{S} \cdot \hat{I}$ синглетное и триплетное состояние валентных электронов перемешиваются. Например, состояния атома $|1\rangle$ и $|2\rangle$ в большом магнитном поле в основном содержат состояние электрона $|S_z = -1/2\rangle$ плюс небольшую часть состояния $|S_z = 1/2\rangle$ (раздел 2.3). Поэтому, при взаимодействии пары $|\{1, 2\}_-\rangle$ валентные электроны находятся в основном в нижней проекции триплетного состояния $|S_{z1} = -1/2\rangle|S_{z2} = -1/2\rangle$ плюс добавка синглетного состояния

$$\frac{|S_{z1} = -\frac{1}{2}\rangle|S_{z2} = \frac{1}{2}\rangle - |S_{z1} = \frac{1}{2}\rangle|S_{z2} = -\frac{1}{2}\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.81)$$

Присутствие синглетной добавки приводит к росту длины рассеяния при совпадении нуля энергии в триплетном канале со связанным состоянием в синглетном канале.

Глубина триплетного потенциала V_T существенно меньше, чем синглетного V_c , поскольку в триплетном состоянии электроны не могут находиться в одной точке пространства. Из-за этого существенно падает вероятность найти электроны между ионами, и расталкивание ионов приводит к уменьшению глубины V_T в сравнении с глубиной потенциала V_c . Будучи изолированными друг от друга, потенциалы V_T и V_c дают s -волновую длину рассеяния -2140 и $45,17$ Бор соответственно [83]. Большая собственная длина рассеяния в триплетном потенциале вызвана наличием виртуального энергетического уровня в потенциале V_T .

На рисунке 2.9 приведены графики зависимости s -волновой длины рассеяния от внешнего магнитного поля для трёх смесей атомов: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$, — которые наиболее

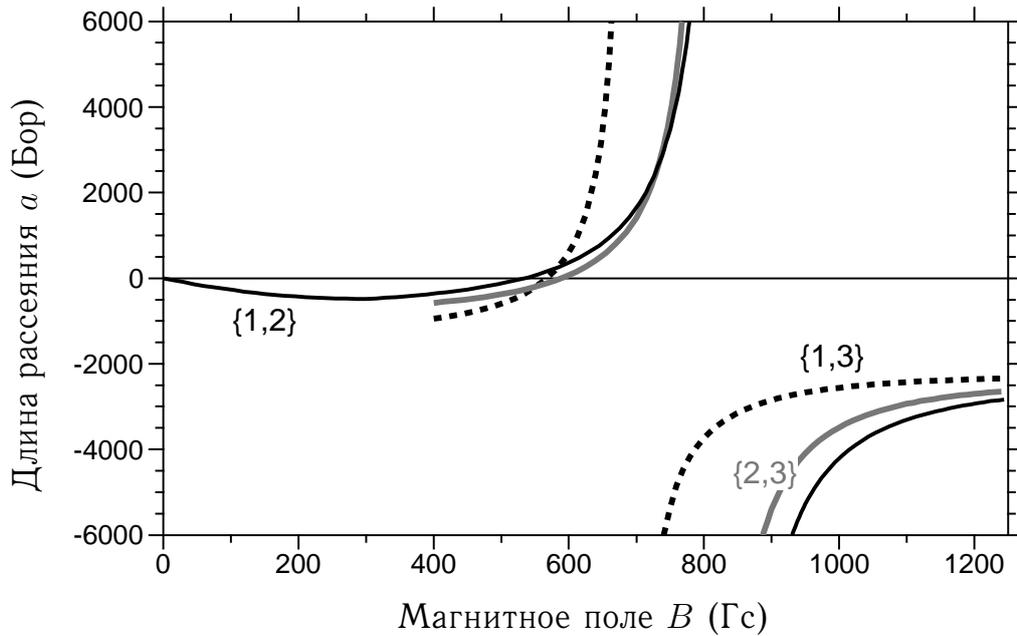


Рисунок 2.9 — Зависимость длины s -волнового рассеяния от магнитного поля для 3 смесей: $\{1, 2\}$ — из работ [84, 83], $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ — по материалам работы [83]. Для смеси $\{1, 2\}$ не показан резонанс существенно меньшей ширины при $B_0 = 543,25$ Гс.

стабильны к неупругим соударениям (подраздел 2.6.7). В этих смесях наблюдаются широкие резонансы при 834, 690 и 811 Гс соответственно [83]. Вблизи резонанса длина рассеяния приближённо подчиняется формуле

$$a(B) = a_{\phi} \left(1 + \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) (1 - g(B - B_0)), \quad (2.82)$$

которая справедлива с точностью 99% при $B = 600 - 1200$ Гс [83]. Параметры приведены в таблице 2.1. Длина рассеяния может быть обращена в 0, что позволяет получать

Таблица 2.1 — Параметры s -волновых резонансов Фешбаха для трёх наиболее стабильных смесей. Первые три резонанса — из работы [83]. Последний — из работы [85].

Смесь	Положение B_0 , Гс	Ширина ΔB , Гс	a_{ϕ} , Бор	Поправка g , 1/Гс
$\{1, 2\}$	834,149	300	-1405	0,00040
$\{1, 3\}$	690,43	122,3	-1727	0,00020
$\{2, 3\}$	811,22	222,3	-1490	0,000395
$\{1, 2\}$	543,25	0,1	60	—

идеальный ферми-газ. Свойства идеального ферми-газа полностью известны из теории, поэтому он используется для отработки экспериментальных методов и проверки правильности работы эксперимента. Для смеси $\{1, 2\}$ поле обращения длины рассеяния в 0 точно измерено и составляет $527,5 \pm 0,2$ Гс [84, 86].

2.6.6 Регуляризованный δ -потенциал

В широком круге задач основным каналом парного взаимодействия является s -волновое рассеяние в центрально-симметричном потенциале $\hat{V}_{\text{ц}}(\hat{r})$. А единственным параметром взаимодействия выступает длина рассеяния a . Это предполагает возможность

перенормировки потенциала. Задача перенормировки — использовать потенциал, который более удобен в расчётах, чем истинный потенциал, и при этом даёт ту же амплитуду рассеяния a .

Контактный потенциал

$$V_{\text{ц}}(\hat{r}) = \frac{4\pi\hbar a}{m} \delta(\hat{r}) \quad (2.83)$$

даёт верную длину рассеяния a в первом приближении Борна. В более высоких борновских приближениях потенциал приводит к расходимостям ввиду неограниченности в пространстве импульсов. Поэтому для использования контактного потенциала за пределами первого борновского приближения необходима дополнительная регуляризация, позволяющая избавиться от расходимостей.

Для того, чтобы продемонстрировать расходимость, а затем выполнить регуляризацию, выразим амплитуду рассеяния через оператор перехода \hat{T} ([81], §7.2), который в случае упругого рассеяния определён выражением

$$V_{\text{ц}}(\hat{r})|\psi_{\vec{k}}\rangle \equiv \hat{T}|\vec{k}\rangle, \quad (2.84)$$

где $|\psi_{\vec{k}}\rangle$ — собственное состояние задачи рассеяния

$$\left(\frac{\hbar^2 \hat{k}^2}{2(m/2)} + V_{\text{ц}}(\hat{r}) \right) |\psi_{\vec{k}}\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2(m/2)} |\psi_{\vec{k}}\rangle. \quad (2.85)$$

Оператор перехода подчиняется уравнению Липмана¹⁴⁾—Швингера¹⁵⁾

$$\hat{T} = V_{\text{ц}}(\hat{r}) + V_{\text{ц}}(\hat{r}) \frac{1}{\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - \hat{k}^2) + i\eta} \hat{T}, \quad (2.86)$$

а амплитуда рассеяния из состояния $|\vec{k}\rangle$ в $|\vec{k}'\rangle$ рассчитывается как матричный элемент оператора перехода:

$$f_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2(m/2)}{\hbar^2} (2\pi)^3 \langle \vec{k}' | \hat{T} | \vec{k} \rangle. \quad (2.87)$$

Решая уравнение Липмана—Швингера (2.86) суммированием порядков теории возмущения, получим

$$\begin{aligned} \hat{T} = & V_{\text{ц}}(\hat{r}) + V_{\text{ц}}(\hat{r}) \frac{1}{\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - \hat{k}^2) + i\eta} V_{\text{ц}}(\hat{r}) + \\ & + V_{\text{ц}}(\hat{r}) \frac{1}{\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - \hat{k}^2) + i\eta} V_{\text{ц}}(\hat{r}) \frac{1}{\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - \hat{k}^2) + i\eta} V_{\text{ц}}(\hat{r}) + \dots \end{aligned} \quad (2.88)$$

Первое и второе слагаемое отвечают первому и второму приближению Борна соответственно. В первом порядке

$$f_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'}^{(1)} = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} (2\pi)^3 \langle \vec{k}' | V_{\text{ц}}(\hat{r}) | \vec{k} \rangle = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} g(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.89)$$

¹⁴⁾Bernard A. Lippmann

¹⁵⁾Julian Seymour Schwinger, 1918–1994

где $g(\vec{q})$ — образ Фурье¹⁶⁾ потенциала взаимодействия:

$$g(\vec{q}) \equiv \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V_{\text{и}}(r) d^3\vec{r}. \quad (2.90)$$

В случае контактного потенциала (2.83) $g(\vec{q}) = 4\pi\hbar^2 a/m$. То есть образ контактного потенциала не зависит от импульса. С одной стороны, это отражает ситуацию, часто возникающую при рассеянии медленных частиц: для некоторого интервала импульсов можно сделать приближение $g(\vec{q}) \approx g(0)$. С другой стороны, отсутствие спада $g(\vec{q})$ при больших импульсах означает, что потенциал может рассеивать бесконечно быстрые частицы. Уже во втором борновском приближении это приводит к расходимости. В общем случае

$$f_{\vec{k}\rightarrow\vec{k}'}^{(2)} = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \int \frac{g(\vec{q}-\vec{k}')g(\vec{k}-\vec{q})}{\frac{\hbar^2}{m}(k^2-q^2)+i\eta} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \xrightarrow{k\rightarrow 0} \frac{m}{4\pi\hbar^2} \frac{m}{\hbar^2} \int \frac{(g(\vec{q}))^2}{q^2} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}. \quad (2.91)$$

Для контактного потенциала (2.83) получаем расходимость при интегрировании по большим импульсам:

$$f_{\vec{k}\rightarrow\vec{k}'}^{(2)} \xrightarrow{k\rightarrow 0} 4\pi a^2 \int \frac{1}{q^2} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}. \quad (2.92)$$

Произведём регуляризацию потенциала (2.83). Найдём, каким должен быть фурье-образ потенциала взаимодействия, чтобы избежать расходимости. Умножим уравнение (2.86) слева и справа на $\langle \vec{k}' |$ и $| \vec{k} \rangle$ соответственно. Получим

$$-f_{\vec{k}\rightarrow\vec{k}'} = \frac{m}{4\pi\hbar^2} g(\vec{k}-\vec{k}') - \int \frac{g(\vec{q}-\vec{k}')f_{\vec{k}\rightarrow\vec{q}}}{\frac{\hbar^2}{m}(k^2-q^2)+i\eta} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}. \quad (2.93)$$

Потребуем, чтобы искомый потенциал обладал рядом свойств δ -потенциала (2.83). Во-первых, будем считать, что $f_{\vec{k}\rightarrow\vec{k}'} = -a$ для $\forall \vec{k}$. Во-вторых, будем полагать, что фурье-образ также не зависит от импульса: $g(\vec{q}) = g(0) \equiv g_0$. После этих ограничений выражение для фурье-образа g_0 принимает вид

$$\frac{1}{g_0} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} - \frac{m}{\hbar^2} \int \frac{1}{q^2} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}. \quad (2.94)$$

Это выражение определяет регуляризованный δ -потенциал через образ Фурье. Определённый таким образом потенциал обладает рядом свойств потенциала (2.83) и, в то же время, позволяет избежать ультрафиолетовой расходимости (2.92). В подразделе 2.7.3 потенциал используется для расчёта свойств системы на мосту БКШ–БЭК.

Другие варианты регуляризации рассмотрены, например, в работе [87].

2.6.7 Стабильность по отношению к неупругим столкновениям

Неупругие столкновения препятствуют установлению термодинамического равновесия, переводя внутреннюю энергию частиц в кинетическую. Диссертационная работа нацелена в первую очередь на исследование равновесных систем, поэтому неупругие столкновения выступают в качестве нежелательного эффекта. В этом разделе рассматривается устойчивость смесей различных состояний по отношению к неупругим соударениям. Для того, чтобы рассматривать систему как находящуюся в термодинамическом равновесии, упругие столкновения должны быть значительно более частыми, чем неупругие.

¹⁶⁾Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

Проанализируем парные неупругие столкновения, более или менее следуя подходам работы [88]. Два атома, находящиеся в основном электронном состоянии, взаимодействуют друг с другом через потенциал (2.43):

$$\hat{V}(\hat{r}) = \hat{V}_u(\hat{r}) + \hat{V}_d(\hat{r}). \quad (2.95)$$

Ввиду малой кинетической энергии атомов рассмотрим лишь взаимодействия, при которых пара частиц до столкновения находилась в s -волновом состоянии, то есть в системе центра масс механический момент импульса пары был равен 0.

Сначала рассмотрим столкновения в сферически симметричном потенциале $\hat{V}_u(\hat{r})$. По теореме Вигнера¹⁷⁾–Экарта¹⁸⁾ потенциал не может изменить механический момент импульса пары, и поэтому на выходе пара по-прежнему в s -состоянии. Внутренние состояния атомов наоборот перемешиваются взаимодействием, поскольку потенциал по разному действует на пару атомов с валентными электронами в триплетном ($S_\Sigma = 1$) и синглетном ($S_\Sigma = 0$) состоянии и в общем виде может быть записан как

$$\hat{V}_u(\hat{r}) = V_t(\hat{r}) |S_\Sigma = 1\rangle \langle S_\Sigma = 1| + V_c(\hat{r}) |S_\Sigma = 0\rangle \langle S_\Sigma = 0|. \quad (2.96)$$

Потенциал коммутирует с оператором проекции полного углового момента пары $\hat{F}_{\Sigma z} = \hat{F}_{1z} + \hat{F}_{2z}$. Таким образом, пара атомов, находившихся до столкновения во внутреннем состоянии $|\{\alpha, \beta\}_-\rangle$, в ходе столкновения взаимодействует со всеми состояниями $|\{\alpha', \beta'\}_-\rangle$, у которых такая же проекция $\hat{F}_{\Sigma z}$. Однако переходы в состояния $|\{\alpha', \beta'\}_-\rangle$ возможны, лишь если эти переходы энергетически выгодны. Например, исходное внутреннее состояние пары $|\{1, 2\}_-\rangle$ обладает проекцией $\hat{F}_{\Sigma z} = 1/2 + (-1/2) = 0$ и при столкновении взаимодействует с четырьмя состояниями, обладающими такой же проекцией: $|\{1, 4\}_-\rangle$, $|\{2, 5\}_-\rangle$, $|\{3, 6\}_-\rangle$ и $|\{4, 5\}_-\rangle$. Переход в любое из четырёх состояний энергетически запрещён, поэтому взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазы. Таким образом, состояние $|\{1, 2\}_-\rangle$ устойчиво по отношению к неупругим столкновениям в электростатическом потенциале.

Пара в состоянии $|\{1, 4\}_-\rangle$, напротив, при столкновении может переходить в состояние $|\{1, 2\}_-\rangle$, так как последнее обладает меньшей энергией. В итоге, для пары в состоянии $|\{1, 4\}_-\rangle$ возможен неупругий процесс $|\{1, 4\}_-\rangle \rightarrow |\{1, 2\}_-\rangle$. Применяя аналогичные рассуждения можно установить, что только 3 состояния пары устойчивы к неупругим столкновениям в электростатическом потенциале $\hat{V}_u(\hat{r})$:

$$|\{1, 2\}_-\rangle, \quad |\{1, 3\}_-\rangle \quad \text{и} \quad |\{2, 3\}_-\rangle. \quad (2.97)$$

Теперь рассмотрим неупругие процессы, происходящие под действием диполь-дипольного потенциала $\hat{V}_d(\hat{r})$, определённого формулой (2.58) и представимого также в виде неприводимых сферических тензоров (2.60). Потенциал переводит s -волновое пространственное состояние пары в d -волновое, поскольку содержит только шаровые гармоники второго ранга. Кроме того, потенциал изменяет проекцию полного электронного спина пары $S_{\Sigma z} = S_{1z} + S_{2z}$ на целую величину от -2 до 2 .

Сначала рассмотрим устойчивость состояния $|\{1, 2\}_-\rangle$. Есть только одно состояние с меньшей энергией — $|1\rangle|1\rangle$, в котором оба атома находятся в одном и том же состоянии $|1\rangle$. Состояния $|\{1, 2\}_-\rangle$ и $|1\rangle|1\rangle$ связаны слагаемым потенциала (2.60), содержащим $\hat{T}_{2,1}$. Однако экзотермический процесс $|\{1, 2\}_-\rangle \rightarrow |1\rangle|1\rangle$ запрещён статистикой Ферми: слагаемое $Y_{2,-1}(\hat{r}/\hat{r}) \hat{T}_{2,1}$ изменяло бы пространственное состояние пары с одного чётного (s -волнового) на другое чётное (d -волновое). На фоне того, что внутреннее состояние

¹⁷⁾Eugene Paul Wigner, 1902–1995

¹⁸⁾Carl Henry Eckart, 1902–1973

менялось бы с нечётного $|\{1, 2\}_-\rangle$ на чётное $|1\rangle|1\rangle$, состояние пары становилось бы чётным по перестановке частиц, что запрещено статистикой Ферми. Таким образом, состояние $|\{1, 2\}_-\rangle$ устойчиво к неупругим парным столкновениям и в электростатическом, и в диполь-дипольном потенциале.

Для состояния $|\{1, 3\}_-\rangle$ возможен медленный неупругий процесс. Лежащие ниже по энергии состояния — это $|\{1, 2\}_-\rangle$, $|1\rangle|1\rangle$, $|2\rangle|2\rangle$. Переходы в два последних запрещены статистикой Ферми. Остаётся неупругий процесс $|\{1, 3\}_-\rangle \rightarrow |\{1, 2\}_-\rangle$. Для состояния $|\{2, 3\}_-\rangle$ возможны два неупругих процесса: $|\{2, 3\}_-\rangle \rightarrow |\{1, 2\}_-\rangle$ и $|\{2, 3\}_-\rangle \rightarrow |\{1, 3\}_-\rangle$. Скорость этих процессов крайне мала. Легко конструируется система, в которой частота упругих соударений подавляюще превосходит частоту диполь-дипольных соударений. В разделе 2.6.3 показано, что амплитуда рассеяния под действием каждой из проекций диполь-дипольного потенциала не превышает 0,2 Бора, что много меньше даже размера электростатического потенциала $r_0 = 5$ Бор. Сколь угодно большие амплитуды упругих соударений достижимы при помощи резонанса Фешбаха (раздел 2.6.5). В магнитных полях $B \gg \hbar a_{\text{св/т}}/2\mu_B \approx 50$ Гс неупругие соударения дополнительно подавлены, поскольку их амплитуда рассеяния пропорциональна $\sin \theta_{\pm}$, который согласно формулам (2.9) спадает в больших полях как $1/B$: $\sin \theta_{\pm} \approx \hbar a_{\text{св/т}}/\sqrt{8}\mu_B B$.

Перейдём к неупругим 3-частичным соударениям. Этот процесс возможен в том числе и для смеси $\{1, 2\}$, которая абсолютно устойчива к неупругим 2-частичным столкновениям. В ферми-системе, состоящей из двух сортов частиц, например в смеси $\{1, 2\}$, 3-частичные соударения существенно подавлены благодаря запрету Паули¹⁹⁾, поскольку для такого столкновения две частицы с одинаковыми спинами должны оказаться в одном и том же месте. 3-частичные соударения проявляют себя лишь на бозевской стороне резонанса Фешбаха ($a > 0$), где для них присутствуют относительно благоприятные условия: с одной стороны, из-за сильных взаимодействий состояние сталкивающихся частиц занимает большую область в пространстве импульсов, что позволяет волновым функциям перекрываться в координатном пространстве; с другой стороны — близко с энергией свободного состояния двух частиц лежит энергетически разрешённое связанное состояние. Столкновение 3 атомов приводит к образованию молекулы двумя атомами и передаче излишка энергии третьему. Частоты неупругих 3-частичных столкновений измерены в работе [89]. Во многих случаях неупругие 3-частичные соударения могут подавляться в сравнении с упругими 2-частичными соударениями путём уменьшения плотности n , поскольку при постоянном сечении рассеяния частота 3-частичных процессов $\propto n^2$, а частота 2-частичных столкновений $\propto n$.

Смеси 3 спиновых состояний в некоторых случаях могут быть неустойчивы по отношению к образованию 3-частичных связанных состояний [50].

2.7 Коллективные явления в газе взаимодействующих ферми-атомов

2.7.1 «Высокотемпературная» сверхтекучесть атомного газа

Рассмотрим смесь ферми-атомов, находящихся в двух равнонаселённых внутренних состояниях, например $|1\rangle$ и $|2\rangle$. В системе с s -волновым взаимодействием возможно спаривание атомов и образование бозе-эйнштейновского конденсата пар. Если длина рассеяния a отрицательна и мала по сравнению с межчастичным расстоянием $L = n^{-1/3}$, то спаривание происходит в пространстве импульсов и описывается теорией Бардина–Купера–Шриффера (БКШ). В рамках этой теории, образование пар и конденсированной

¹⁹⁾Wolfgang Ernst Pauli, 1900–1958

фазы происходит в одном и том же интервале температур, при

$$T < T_{\text{кр.}} = \frac{e^{\gamma'}}{\pi} \frac{8}{e^2} \varepsilon_{\text{Ф}} e^{-\pi/2\kappa_{\text{Ф}}|a|} = 0,61 \varepsilon_{\text{Ф}} e^{-\pi/2\kappa_{\text{Ф}}|a|}, \quad (2.98)$$

где $\gamma' \approx 0,577216$ — постоянная Эйлера²⁰⁾, а $\varepsilon_{\text{Ф}}$ и $\kappa_{\text{Ф}}$ — локальная энергия и импульс Ферми соответственно, определённые через локальную плотность равенствами $\varepsilon_{\text{Ф}} = \frac{\hbar^2}{2m} \kappa_{\text{Ф}}^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{2/3}$. Условие малости длины рассеяния в сравнении с L может быть записано через импульс Ферми: $\kappa_{\text{Ф}}|a| \ll 1$.

При больших длинах рассеяния, $|a| \gg 1/\kappa_{\text{Ф}}$, в формуле (2.98) видна тенденция: с увеличением $|a|$ критическая температура возрастает и может стать сравнимой с $\varepsilon_{\text{Ф}}$. В области сильного взаимодействия теория БКШ не может быть использована для количественных расчётов и лишь показывает тенденцию. Для количественного анализа нужна более общая теория, не ограниченная областью $-a \ll 1/\kappa_{\text{Ф}}$. Прежде появления таких теорий Горьковым²¹⁾ и Меликом-Бархударовым [90] был уточнён предэкспоненциальный коэффициент в случае слабой связи:

$$T_{\text{кр.}} = \frac{e^{\gamma'}}{\pi} \left(\frac{2}{e}\right)^{7/3} \varepsilon_{\text{Ф}} e^{-\pi/2\kappa_{\text{Ф}}|a|} = 0,28 \varepsilon_{\text{Ф}} e^{-\pi/2\kappa_{\text{Ф}}|a|}. \quad (2.99)$$

Коэффициент оказался в $(4e)^{1/3}$ раз ниже, чем в формуле (2.98), из-за экранировки парного взаимодействия соседними частицами [91].

Область сильного взаимодействия ($\kappa_{\text{Ф}}|a| \gg 1$) описана группой теорий, основанных на идеи [92, 93] об использовании за пределами области $-\kappa_{\text{Ф}}a \ll 1$ коллективного состояния ферми-системы

$$|\text{БКШ}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \hat{c}_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{c}_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} \right) |\text{вакуум}\rangle. \quad (2.100)$$

Изначально это состояние применялось лишь для описания области слабого притяжения. В этой формуле $\hat{c}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}$ — оператор рождения фермиона с импульсом $\hbar\vec{k}$ и спином σ , а $u_{\vec{k}}$ и $v_{\vec{k}}$ — переменные, которые варьируются для минимизации ожидаемого значения оператора $\hat{H} - \mu\hat{N}_{\Sigma}$, где \hat{N}_{Σ} — оператор полного числа частиц. В рамках подобной теории может быть найдена температура разрушения куперовских пар T^* [94]. Для слабого взаимодействия превышение T^* над температурой фазового перехода $T_{\text{кр.}}$ ничтожно, поэтому, найдя T^* , можно считать, что $T_{\text{кр.}} \approx T^*$. Однако в случае сильной связи бозе-эйнштейновская конденсация куперовских пар происходит при температурах очевидно меньших, чем T^* [92, 5]. Поэтому теория, способная находить лишь T^* , не отвечает на вопрос о величине $T_{\text{кр.}}$. В рамках подобной теории, вычисляя самосогласованно химический потенциал и энергию связи куперовской пары, в унитарном пределе ($a = \infty$) можно найти [95], что энергия связи обращается в ноль при $T^* = 0,49 \varepsilon_{\text{Ф}}$. В этой теории не учтена поправка Горькова–Мелика-Бархударова [90, 91].

В последствии для унитарной ферми-системы были созданы теории, которые различают спаривание атомов и фазовый переход. Кроме того, температура фазового перехода рассчитывалась различными методами Монте-Карло. Теоретические предсказания для случая $a = -\infty$ собраны в таблице 2.2. Как видим, результаты теорий существенно отличаются друг от друга. Предсказания лежат в интервале $T_{\text{кр.}}/\varepsilon_{\text{Ф}} = 0,14-0,26$. Почти двукратный разброс в предсказаниях делает крайне актуальным измерение критической температуры.

²⁰⁾Leonhard Euler, 1707–1783

²¹⁾Лев Петрович Горьков

Таблица 2.2 — Температуры перехода к сверхтекучести $T_{кр.}$ и появления куперовских пар T^* , предсказанные различными теориями при $a = -\infty$. Результаты измерений — в таблице 7.1 на странице 136.

Тип теории	$\frac{T_{кр.}}{\varepsilon_{\Phi}}$	$\frac{T^*}{\varepsilon_{\Phi}}$	$\frac{T_{кр.}}{E_{\Phi}}$	$\frac{T^*}{E_{\Phi}}$	Год	Коллектив, ссылка
Самосогласованное применение состояния (2.100). Щель спаривания Δ рассчитана в подразделе 2.7.3	—	0,49	—	—	1985	Nozières и Schmitt-Rink [94], также [95]
Самосогласованное применение состояния (2.100), учёт флуктуаций	0,24	0,60	0,31	0,40	2004	Strinati и др. [96]
Самосогласованное применение состояния (2.100). Учёт молекулярного канала, взаимодействия синглетных молекул с атомами	0,26	—	0,29	—	2005	Levin и др. [97, 5]
Монте-Карло	$0,23 \pm 0,02$	—	—	—	2006	Bulgac и др. [98]
Монте-Карло	$0,152 \pm 0,007$	—	—	—	2006	Прокофьев, Сви- стунов и др. [99]
1-канальный гамильтониан (2.114). Термодинамические потенциалы выражены через варьируемые 1- и 2-частичные температурные функции Грина	0,160	—	—	—	2007	Zwenger и др. [100]
Газ из $2K$ спиновых компонент. Разложение по $1/K$ при $K = 1$	0,136	—	—	—	2007	Nikolić и Sachdev [101]
Разложение по отлчию от пространственной размерности 4	0,249	—	—	—	2007	Nishida и Son [102, 103]
Интерполяция между пространственными размерностями 2 и 4	$0,183 \pm 0,014$	—	—	—	2007	Nishida и Son [102, 104]
Монте-Карло	0,245	0,7	—	—	2007	Akkineni и др. [105]

Впервые измерения температуры фазового перехода выполнены автором диссертации и коллегами. Измерения проведены двумя различными методами [97, 7] и описаны в разделе 7.3 на странице 129 и разделе 6.4 на странице 120. Результаты этих измерений и последующих, выполненных другими коллективами, сведены в таблицу 7.1 на странице 136.

В ряде теоретических работ $T_{кр.}$ рассчитана не только для однородной среды, но и для ферми-газа в параболическом потенциале. Эти расчёты позволяют производить более прямое сравнение с экспериментом. Для таких теорий в таблице 2.2 приведены температуры, нормированные на $E_{\Phi} = \hbar\omega(6N)^{1/3}$ — энергию Ферми невзаимодействующего ферми-газа в ловушке. Во всех случаях, однако, расчёты выполнены в приближении локальной однородности, не учитывая эффекты, связанные с конечным размером системы.

2.7.2 Универсальность газа с резонансными взаимодействиями

Следуя работе [106], универсальной назовём систему, локальные термодинамические свойства которой зависят лишь от концентрации частиц n и температуры T . То есть

свойства не должны зависеть от типа частиц, составляющих систему, — например, свойства универсальной системы атомов идентичны свойствам универсальной нейтронной материи. Кроме того, свойства не зависят от деталей межчастичного взаимодействия. В этом подразделе показано, что универсальным может оказаться газ ферми-атомов, равнонасеяющих 2 спиновых состояния и взаимодействующих посредством s -волновых столкновений в унитарном режиме ($a \rightarrow \infty$). Рассмотрены количественные следствия универсальности.

В атомном газе легко достижимо неравенство $|a| \gg r_0$. То есть длина рассеяния много больше размеров потенциала взаимодействия. Поскольку $r_0 \ll$ межчастичного расстояния $L = n^{-1/3}$, r_0 не является параметром задачи, и a/L остаётся единственным параметром взаимодействия. Из L и констант можно построить энергетический параметр — локальную энергию Ферми $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi^2n)^{2/3}$. После этого все локальные термодинамические величины выражаются через размерную величину, зависящую только от L , и безразмерную функцию двух безразмерных переменных T/ε_F и $\varkappa_F a$. В последней величине $\varkappa_F = (6\pi^2n)^{1/3}$ — локальный импульс Ферми. Таким образом, длина s -волнового рассеяния a — единственный микроскопический параметр 2-частичного взаимодействия, влияющий на коллективные свойства.

На резонансе Фешбаха величина $\varkappa_F a$ также не является параметром задачи, поскольку $a = \infty$. Следовательно, можно выдвинуть гипотезу: локальные характеристики системы с резонансным парным взаимодействием вовсе не зависят от микроскопических параметров и являются функциями только от n и T [106], то есть система универсальна. Дополнительные требования для столь простого рассмотрения коллективных свойств атомного газа:

- большая ширина резонанса Фешбаха и
- локальная однородность.

Требуемое условие на ширину резонанса $\mu_B \Delta B \gg \varepsilon_F, T$ означает, что зависимость амплитуды 2-частичного взаимодействия от энергии сводится к формуле (2.55) и не возникает более быстрого спада амплитуды при увеличении кинетической энергии.

Рассмотрим количественные следствия универсальности. Во-первых, при $T = 0$ любые локальные свойства многочастичной системы могут зависеть лишь от L . Например, единственным локальным энергетическим параметром является локальная энергия Ферми $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi^2n)^{2/3}$. Следовательно, локальный химический потенциал может отличаться от энергии Ферми только постоянным множителем [3], который обозначим $(1 + \beta)$:

$$\mu_{\text{лок.}} = (1 + \beta) \varepsilon_F. \quad (2.101)$$

Во-вторых, любая характерная температура должны выражаться через энергию Ферми, умноженную на универсальную константу. К таким температурам относятся $T_{\text{кр.}}$ и T^* — температуры разрушения сверхтекучей фазы и куперовских пар соответственно.

Самой по себе универсальности не достаточно для нахождения универсальных констант β , $T_{\text{кр.}}/\varepsilon_F$ и других. Нахождение этих констант является сложной расчётной задачей теории многих тел. Нетривиальность построения теории можно видеть на примере таблицы 2.2 на странице 48, приводящей противоречивые результаты вычислений. В этих условиях становятся востребованными измерения универсальных констант.

Если гипотеза об универсальности систем с резонансными взаимодействиями верна, то универсальные константы являются общими для всех сильно взаимодействующих систем. Под сильно взаимодействующей будем понимать систему, подчиняющуюся неравенству

$$|a| \gg n^{-1/3} \gg r_0. \quad (2.102)$$

В сильновзаимодействующем режиме находится часть материи нейтронных звёзд. Нейтроны со спином вверх и вниз взаимодействуют посредством s -волновых столкновения с длиной рассеяния $a = -18,8$ фм. Размер потенциала взаимодействия $r_0 \approx 2$ фм. Эти два числа задают плотности нейтронной материи, при которых выполнимо неравенство (2.102).

Из микроскопических уравнений гипотеза об универсальности газа с резонансными s -волновыми взаимодействиями в общем случае не доказана. Таким образом, её проверка является актуальной задачей. Впервые произведённая проверка универсальной гипотезы при конечных температурах описана в разделе 5.3 на странице 98. Кроме того, для основного состояния универсальная гипотеза проверена новым методом — по распространению звука (раздел 5.2 на странице 94).

Покажем, как знание универсальной константы β позволяет вычислить свойства системы в основном состоянии, при $T = 0$. Возьмём за основу выражение (2.101) для локального химического потенциала. Энергию частицы в поле окружающих частиц (среднее поле) можно ввести по аналогии с ферми-газом слабовзаимодействующих частиц, вычтя ε_Φ из химического потенциала:

$$U_{\text{ср.п.}} \equiv \mu_{\text{лок.}} - \varepsilon_\Phi = \beta \varepsilon_\Phi. \quad (2.103)$$

Эта зависимость очевидно отличается от формулы среднего поля для ферми-газа со слабым взаимодействием ($\chi_\Phi |a| \ll 1$):

$$U_{\text{ср.п.}} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n. \quad (2.104)$$

Зная величину β , можно решить вопрос о стабильности ферми-системы с максимально сильным притяжением, $a \rightarrow -\infty$, и дать частичный ответ к задаче Берча, обсуждаемой в подразделе 1.2.3. Если бы формула среднего поля (2.104) была верной при $\forall a$, то разрушения системы не удалось бы избежать, поскольку давление Ферми не смогло бы противостоять притяжению при $a \rightarrow -\infty$. Смена формулы среднего поля с (2.104) на (2.103) меняет ситуацию, ставя стабильность системы в зависимость от значения β . Для стабильности необходимо $\beta > -1$. В работе [22] показано, что система остаётся стабильной при $a \rightarrow -\infty$. В подразделе 5.2.2 сообщается о прецизионном измерении β , значение которой составило $-0,565 \pm 0,015$.

Формула (2.101) позволяет полностью охарактеризовать макроскопические свойства основного состояния, найти профиль плотности газа $n_{\text{осн.}}(\vec{x})$, глобальный химический потенциал $\mu_{\text{осн.}}$ и энергию $E_{\text{осн.}}$. Профиль плотности может быть найден из условия постоянства глобального химического потенциала:

$$\mu_{\text{осн.}} = (1 + \beta) \varepsilon_\Phi(n_{\text{осн.}}(\vec{x})) + U(\vec{x}). \quad (2.105)$$

Для гармонического потенциала находим, что

$$n_{\text{осн.}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{2m\mu_{\text{осн.}}}{(1+\beta)\hbar^2} \right)^{3/2} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{R_i^2} \right)^{3/2}, & \text{при } x_i < R_i \\ 0, & \text{при } x_i > R_i, \end{cases} \quad (2.106)$$

где $R_i \equiv \sqrt{2\mu_{\text{осн.}}/m\omega_i^2}$ — радиус Томаса–Ферми в i -м направлении. То есть при $T = 0$ профиль плотности по форме совпадает с профилем Томаса–Ферми идеального ферми-газа (2.31). Глобальный химический потенциал $\mu_{\text{осн.}}$ может быть найден из условия на число частиц в каждом спиновом состоянии $N = \int n_{\text{осн.}}(\vec{x}) d^3\vec{x}$:

$$\mu_{\text{осн.}} = \sqrt{1 + \beta} E_\Phi = \sqrt{1 + \beta} \hbar (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} (6N)^{1/3}, \quad (2.107)$$

то есть выражается через химический потенциал идеального газа E_Φ и универсальный множитель.

Внутренняя энергия $E_{\text{внутр. } \Delta V}$ малого объёма ΔV складывается из кинетической энергии и энергии взаимодействия $2\Delta N$ частиц, содержащихся в этом объёме в обоих спиновых состояниях. Найдём $E_{\text{внутр. } \Delta V}$, воспользовавшись достаточно общим термодинамическим соотношением

$$\mu_{\text{лок.}} = \left(\frac{\partial E_{\text{внутр. } \Delta V}}{\partial (2\Delta N)} \right)_{S, \Delta V}, \quad (2.108)$$

откуда получим

$$E_{\text{внутр. } \Delta V} = 2\Delta N \frac{3}{5}(1 + \beta) \varepsilon_\Phi. \quad (2.109)$$

Полная энергия газа в малом объёме ΔV получается добавлением потенциальной энергии $2\Delta N U(\vec{x})$. Энергия всего газа может быть теперь найдена интегрированием по всему объёму ловушки, что даёт

$$E_{\text{осн.}} = \int 2n_{\text{осн.}}(\vec{x}) \left(\frac{3}{5}(1 + \beta) \varepsilon_\Phi + U(\vec{x}) \right) d^3\vec{x} = \frac{3}{2} N E_\Phi \sqrt{1 + \beta}. \quad (2.110)$$

С точностью до множителя $\sqrt{1 + \beta}$ энергия основного состояния совпадает с энергией идеального ферми-газа (2.32).

2.7.3 Мост между статистикой Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна

Мост БКШ–БЭК представляет собой переход от фермионной статистики к бозонной. На фермиевской асимптоте моста основное состояние ферми-системы — газ фермионов, часть которых объединилась в куперовские пары, сконденсированные в состояние с нулевым импульсом. Эта асимптота может приближённо описываться в рамках модели БКШ. Основное состояние на бозевской асимптоте — бозе-эйнштейновский конденсат точечных бозонов, каждый из которых составлен из двух фермионов. В бозевском пределе пару фермионов можно рассматривать как точечный бозон без внутренней структуры. Такой бозон может существовать в вакууме. На фермиевской стороне моста, напротив, пары фермионов существуют только благодаря коллективным эффектам и в вакууме распадаются.

Переход от одного предела к другому достигается путём изменения 2-частичного взаимодействия. Рассмотрим переход на примере частиц, взаимодействие которых описывается потенциалами, показанными на рисунке 2.7. Будем полагать, что частицы равномерно распределены по 2 спиновым состояниям и взаимодействуют посредством s -волновых соударений. Случай потенциала 2.7б соответствует фермиевской стороне резонанса. Этот потенциал не достаточно глубок, чтобы образовать связанное состояние в вакууме, однако при наличии сферы Ферми появляется возможность спаривания путём образования куперовских пар. В этом режиме $a < 0$. Если газ достаточно разрежен ($-\kappa_\Phi a \ll 1$), то основное состояние может быть приближённо описано теорией БКШ. При углублении потенциала появляется связанный уровень (рисунок 2.7а). В результате пара фермионов образует бозон, который стабилен и в вакууме.

Мост БКШ–БЭК представляет собой множество состояний системы между фермиевским и бозевским пределом. Состояния могут быть параметризованы величиной $\kappa_\Phi a$. Фермиевскому и бозевскому пределу соответствуют $\kappa_\Phi a = 0-$ и $0+$. Область $\kappa_\Phi a = \infty$ отвечает сильным взаимодействиям. Свойства сильно взаимодействующего газа обсуждаются в предыдущих подразделах 2.7.1 и 2.7.2. Параметр $\kappa_\Phi a = \infty$ отвечает такой глубине потенциалов 2.7, при которой существует связанный уровень при нулевой энергии.

Мост реализован только для ультрахолодного атомного газа [19]. Предсказано существование моста для экситонов в твёрдом теле [20] и кварков [21]. В газе атомов ${}^6\text{Li}$ мост

БКШ–БЭК реализован благодаря использованию резонанса Фешбаха между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ при $B = 834$ Гс. Зависимость $a(B)$ показана на графике 2.9. Область $B > 834$ Гс отвечает фермиевской стороне моста, а область $B = 528–834$ Гс — бозевской.

Продемонстрируем свойства моста БКШ–БЭК в рамках простой модели. Вообще говоря, точный расчёт моста представляет собой сложную задачу. Различные приближения дают количественно разные результаты, как можно видеть из примеров, собранных в таблице 2.2. Задача представленной ниже модели — максимально простое качественное описание системы. То, что модель неверна количественно, известно и обсуждается ниже. В рамках модели показано, что при переходе с одного конца моста на другой, в системе с s -волновым взаимодействием свойства основного состояния изменяются непрерывно, без критических точек. Рассчитаны

- химический потенциал μ ,
- энергетическая щель Δ между основным состоянием и множеством возбуждённых,
- распределение чисел заполнения $n_{\vec{k}}$.

Итак, рассмотрим систему фермионов в двух равнонаселённых спиновых состояниях, \uparrow и \downarrow . Пусть возможно лишь парное взаимодействие в центрально-симметричном потенциале между частицами с разными спинами, описываемое оператором

$$\hat{V}_{\text{ц}}(\hat{r}) = V_{\text{ц}}(\hat{r}) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \text{э.с.} \quad (2.111)$$

Частицы находятся в однородном резонаторе объёма Ω с периодическими граничными условиями. Поскольку система однородна, локальный и глобальный химические потенциалы совпадают ($\mu_{\text{лок.}} = \mu$). Оператор $\hat{c}_{\vec{k}\uparrow}^\dagger$ рождает частицу в состоянии с волновой функцией $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}/\sqrt{\Omega}$. Гамильтониан системы в наиболее общем случае имеет вид ([107], §6):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \left(\hat{c}_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\uparrow} + \hat{c}_{\vec{k}\downarrow}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\downarrow} \right) + \\ & + \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{K}} g(\vec{k} - \vec{k}') \hat{c}_{\vec{k}+\vec{K}/2\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\vec{k}+\vec{K}/2\downarrow}^\dagger \hat{c}_{-\vec{k}'+\vec{K}/2\downarrow} \hat{c}_{\vec{k}'+\vec{K}/2\uparrow}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

где $g(\vec{q})$ — образ Фурье потенциала взаимодействия:

$$g(\vec{q}) \equiv \int_{\Omega} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V_{\text{ц}}(r) d^3\vec{r}. \quad (2.113)$$

Модель уже содержит два упрощения. Во-первых, рассматриваются только парные взаимодействия: в гамильтониане отсутствуют члены 3-, 4-частичных столкновений и так далее. Во-вторых, в гамильтониане не учтено наличие синглетных молекул. То есть в модели микроскопический механизм перестройки взаимодействия — это изменение глубины потенциала $V_{\text{ц}}(\hat{r})$, а не механизм перестройки спиновых каналов потенциала, приводящий к резонансу Фешбаха.

В качестве дальнейшего упрощения положим $\vec{K} = 0$ в гамильтониане (2.112), то есть взаимодействуют лишь частицы с равными противоположными импульсами. Это приближение обосновано лишь при наличии сферы Ферми, то есть в пределе БКШ — $\kappa_{\text{фа}} \ll 1$. Рассеяние при наличии сферы Ферми схематично показано на рисунке 2.10. Состояния с импульсом $< \kappa_{\text{ф}}$ в основном заняты, и поэтому частицы не могут в них

рассеиваться из-за запрета Паули. Добавив к запрету Паули законы сохранения энергии и импульса, можно увидеть, что наиболее вероятно рассеяние, при котором и в начальном, и в конечном состоянии импульсы двух взаимодействующих частиц противоположны и лежат на поверхности Ферми.

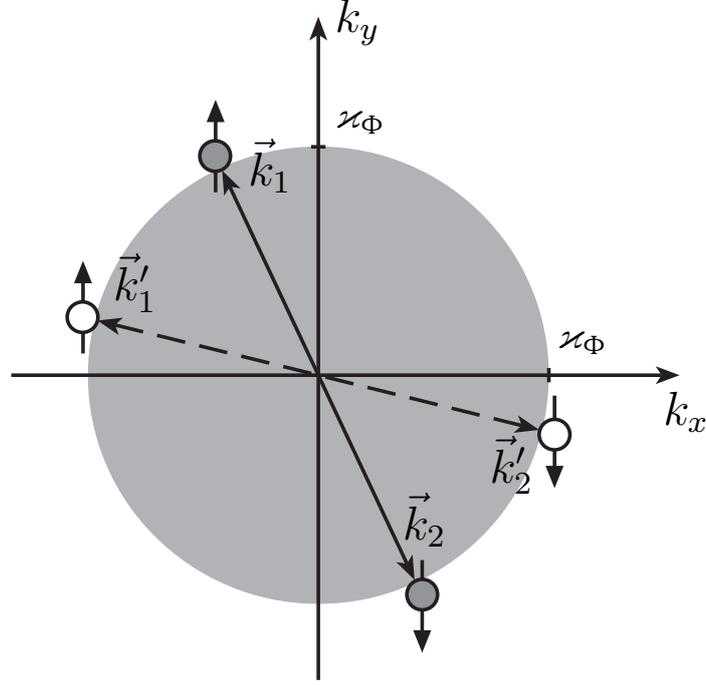


Рисунок 2.10 — Рассеяние $\vec{k}_1, \vec{k}_2 \rightarrow \vec{k}'_1, \vec{k}'_2$ в присутствии сферы Ферми в пространстве импульсов. Из-за запрета Паули, с наибольшей вероятностью и начальное, и конечное состояние пары лежит вблизи сферы Ферми, а импульсы сталкивающихся частиц равны и противоположны.

Далее, воспользуемся приближением $g(\vec{q}) = g_0$. Упрощённый гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \left(\hat{c}_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\uparrow} + \hat{c}_{\vec{k}\downarrow}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\downarrow} \right) + g_0 \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \hat{c}_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \hat{c}_{-\vec{k}'\downarrow} \hat{c}_{\vec{k}'\uparrow}. \quad (2.114)$$

Предположим, что основное состояние имеет вид (2.100). В этом приближении частицы появляются только в виде пар. Коэффициенты $u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}$ выбраны вещественными и связаны нормировочным соотношением

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1. \quad (2.115)$$

Из множества состояний |БКШ⟩ выберем состояние с наименьшей энергией вариационным методом. Минимизируем ожидаемое значение

$$\langle \text{БКШ} | \hat{H} - \mu \hat{N}_\Sigma | \text{БКШ} \rangle, \quad (2.116)$$

варьируя коэффициенты $u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}$ с учётом нормировки (2.115). Гамильтониан задан выражением (2.114), а \hat{N}_Σ — оператор полного числа частиц

$$\hat{N}_\Sigma \equiv \sum_{\vec{k}} \hat{c}_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\uparrow} + \hat{c}_{\vec{k}\downarrow}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\downarrow}. \quad (2.117)$$

Прямое вычисление даёт

$$\langle \text{БКШ} | \hat{H} - \mu \hat{N}_\Sigma | \text{БКШ} \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu \right) v_{\vec{k}}^2 + g_0 \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}. \quad (2.118)$$

Приравнивая нулю первую вариацию этого выражения, можно получить уравнение на энергетическую щель Δ между основным и возбуждённым состоянием ([107], §6 и [108], §3.4.1):

$$-\frac{1}{g_0} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu \right)^2}}. \quad (2.119)$$

В это уравнение входит химический потенциал μ , который можно получить, задав количество частиц $2N$:

$$2N = \langle \text{БКШ} | \hat{N}_\Sigma | \text{БКШ} \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2. \quad (2.120)$$

Коэффициенты $v_{\vec{k}}$, входящие в это выражение, известны из условия минимума величины $\langle \hat{H} - \mu \hat{N}_\Sigma \rangle$:

$$v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu}{\sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu \right)^2}} \right). \quad (2.121)$$

В результате, уравнение для отыскания химического потенциала принимает вид

$$2N = \sum_{\vec{k}} \left(1 - \frac{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu}{\sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu \right)^2}} \right). \quad (2.122)$$

Уравнения (2.119) и (2.122) представляют собой полную систему уравнений для отыскания μ и Δ . Для вычислений необходимо конкретизировать вид g_0 . В качестве потенциала выберем регуляризованный δ -потенциал (подраздел 2.6.6), для которого g_0 задаётся формулой (2.94). Перепишем уравнения (2.119) и (2.122), используя конкретный вид g_0 , а также перейдя от суммирования к интегрированию:

$$-\frac{m}{4\pi\hbar a} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu \right)^2}} - \frac{1}{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}} \right) \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}, \quad (2.123)$$

$$2n = \int \left(1 - \frac{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu}{\sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu \right)^2}} \right) \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (2.124)$$

В уравнении (2.123) последнее слагаемое подынтегрального выражения появилось благодаря процедуре регуляризации потенциала, описанной в подразделе 2.6.6. Без этого слагаемого потенциал был бы расходящимся при больших импульсах. Альтернативой регуляризации могло бы стать введение импульса отсечки в качестве верхнего предела интегрирования.

В работе [109] уравнения (2.123) и (2.124) записаны в более компактном безразмерном виде

$$\frac{1}{\kappa_{\Phi} a} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{3I_2(\mu/\Delta)} \right)^{1/3} I_1 \left(\frac{\mu}{\Delta} \right), \quad (2.125)$$

$$\frac{\Delta}{\varepsilon_{\Phi}} = \left(\frac{2}{3I_2(\mu/\Delta)} \right)^{2/3}, \quad (2.126)$$

используя функции, определённые интегралами

$$I_1(\theta) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\xi^2 - \theta)^2}} - \frac{1}{\xi^2} \right) \xi^2 d\xi, \quad (2.127)$$

$$I_2(\theta) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2 - \theta}{\sqrt{1 + (\xi^2 - \theta)^2}} \right) \xi^2 d\xi. \quad (2.128)$$

Результаты расчёта химического потенциала μ и энергетической щели Δ спектра возбуждения показаны на рисунке 2.11. Правая сторона каждого графика, $1/\kappa_{\Phi} a < 0$,

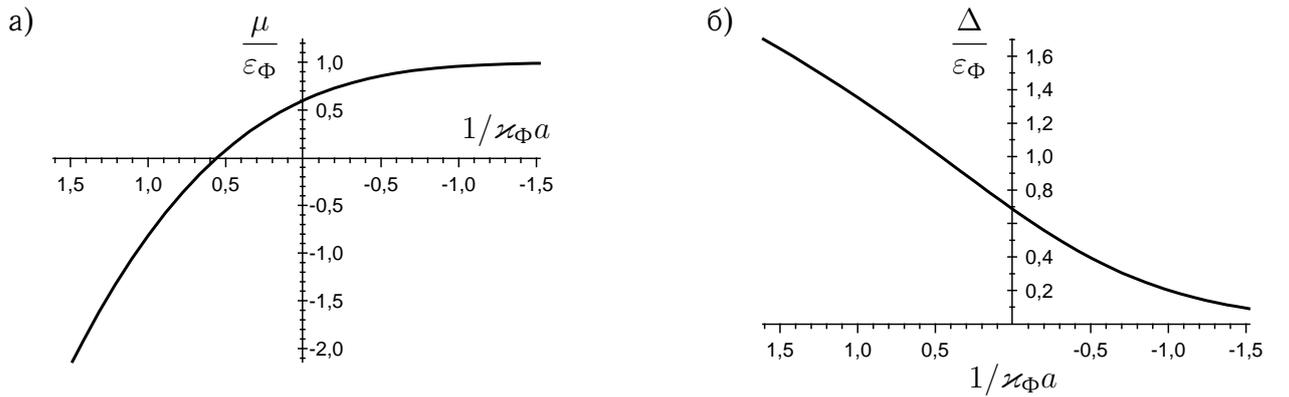


Рисунок 2.11 — Химический потенциал (а) и щель в спектре возбуждения (б) на мосту БКШ–БЭК, в зависимости от параметра взаимодействия $1/\kappa_{\Phi} a$. Направление оси $1/\kappa_{\Phi} a$ обращено, чтобы совпадать с направлением смены B .

соответствует фермиевской стороне моста, а левая, $1/\kappa_{\Phi} a > 0$, — бозевской. Направление оси $1/\kappa_{\Phi} a$ обращено, чтобы совпадать с направлением смены магнитного поля — поля выше резонанса Фешбаха соответствуют $a < 0$ (рисунок 2.8). Точка $1/\kappa_{\Phi} a = 0$ отвечает резонансному рассеянию. Можно видеть, что эта точка не является особой для коллективных свойств системы — и μ , и Δ гладкие в её окрестности.

На фермиевской асимптоте моста, $1/\kappa_{\Phi} a \rightarrow -\infty$, система уравнений (2.125) и (2.126) даёт значения, известные из теории БКШ [109]:

$$\mu \approx \varepsilon_{\Phi}, \quad (2.129)$$

$$\Delta \approx \frac{8}{e^2} \varepsilon_{\Phi} e^{-\pi/2\kappa_{\Phi}|a|} = 1,08 \varepsilon_{\Phi} e^{-\pi/2\kappa_{\Phi}|a|}. \quad (2.130)$$

Величина Δ — это минимальная энергия возбуждения одной частицы при условии, что вторая частица в куперовской паре тоже возбуждается. Таким образом, энергия разрыва куперовской пары равна 2Δ . При добавлении пары частиц в систему полная энергия увеличивается на 2μ .

На бозевской асимптоте, $1/\kappa_{\Phi}a \rightarrow +\infty$, из уравнений (2.125) и (2.126) получаем [109, 110]:

$$\mu \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{2\pi\hbar^2 an}{m}, \quad \Delta \approx \sqrt{\frac{16}{3\pi}} \frac{\varepsilon_{\Phi}}{\sqrt{\kappa_{\Phi}a}}. \quad (2.131)$$

В химическом потенциале первое слагаемое равно $\frac{1}{2}$ энергии связи молекулы, образованной парой частиц в вакууме. А второе слагаемое возникает из-за среднего поля. В основном состоянии бозе-газа молекул с s -волновым взаимодействием и среднее поле, и химический потенциал равны $4\pi\hbar^2 a_{\text{мол.}} n/m_{\text{мол.}}$. В построенной модели молекулярное среднее поле равно превышению химического потенциала молекулы 2μ над энергией связи двух атомов в вакууме:

$$2\mu - \left(-\frac{\hbar^2}{ma^2}\right) = \frac{4\pi\hbar^2 a_{\text{мол.}} n}{m_{\text{мол.}}}. \quad (2.132)$$

Это уравнение позволяет найти длину рассеяния молекул друг на друге $a_{\text{мол.}} = 2a$. Более точная теория, учитывающая взаимодействие 3 и 4 фермионов при рассеянии молекул, даёт другой коэффициент: $a_{\text{мол.}} = 0,6a$ [111].

Переход от фермиевской к бозевской статистике виден по изменению чисел заполнения $n_{\vec{k}}$, которые могут быть рассчитаны по формуле (2.121), поскольку $n_{\vec{k}} = v_{\vec{k}}^2$. Результат расчёта показан на рисунке 2.12. В слабовзаимодействующем ферми-газе ($1/\kappa_{\Phi}a = -1,5$)

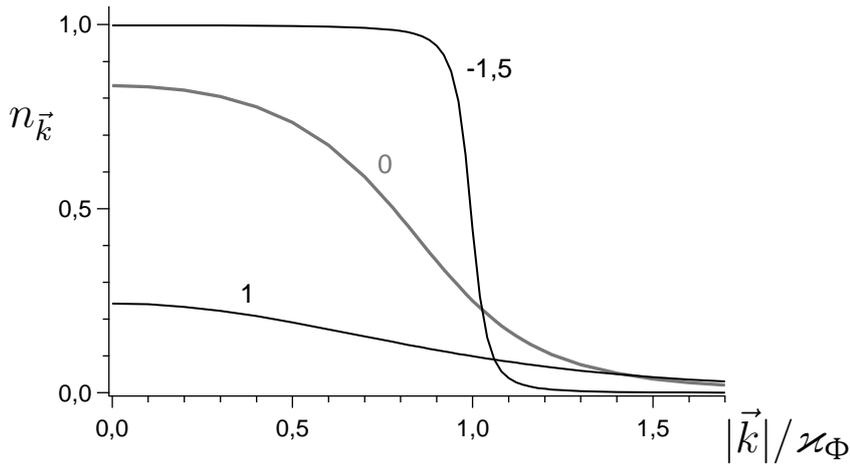


Рисунок 2.12 — Число частиц в состоянии с импульсом \vec{k} при различных значениях $1/\kappa_{\Phi}a$, которыми помечены кривые.

явно видно проявление статистики Ферми — распределение чисел заполнения напоминает ступенчатую функцию, характерную для идеального ферми-газа. Взаимодействия размывают ступенчатое распределение лишь в небольшой области вблизи $|\vec{k}| = \kappa_{\Phi}$. Это распределение согласуется с выбором нулевого импульса пар, $\vec{K} = 0$, в гамильтониане (2.112).

Напротив, на резонансе и в бозевской области $n_{\vec{k}}$ уже не похоже на ступенчатое распределение. С уходом из фермиевской области запрет Паули перестаёт проявляться в распределении чисел заполнения. Это позволяет понять, почему при переходе на бозевскую сторону резонанса становятся возможны 3-частичные соударения в системах, образованных ферми-атомами в двух состояниях. В области, где запрет Паули действует, 3-частичные соударения подавлены, поскольку для этого две частицы с одинаковыми спинами должны оказаться в перекрывающихся пространственных состояниях.

Представленная модель позволила качественно проследить эволюцию основного состояния системы при смене параметра взаимодействия. Видно, что свойства системы изменяются гладко, без критических точек. Для количественного описания моста точность

модели может оказаться недостаточной. Например, в фермиевском пределе экранирование парного взаимодействия соседними частицами уменьшает значение щели (2.130) в $(4e)^{1/3}$ раз (поправка Горькова–Мелика-Бархударова [90]). В бозевском пределе модель завышает длину рассеяния молекул бозонов $a_{\text{мол.}}$. В области сильных взаимодействий ($\kappa_{\text{Ф}}|a| \gg 1$) модель предполагает не зависящую от импульса амплитуду рассеяния $f = -a$, в то время как амплитуда ограничена унитарным пределом (2.57). Температура появления пар атомов, рассчитанная в конечнотемпературном варианте модели, приведена в первой строке таблицы 2.1, где сравнивается с результатами других моделей в унитарном пределе. Одноканальный гамильтониан (2.112) не учитывает наличие синглетных молекул, присутствующих в механизме резонанса Фешбаха. В 3-мерной системе вблизи широкого резонанса Фешбаха учёт таких молекул приводит лишь к малым поправкам в коллективных свойствах системы [112]. В 2-мерной системе, напротив, учёт молекулярного канала может оказаться принципиальным при вычислении среднего поля [113].

Моделирование свойств газа на мосту БКШ–БЭК представляет собой сложную расчётную задачу. Различные теоретические модели дают количественно разные результаты, что делает востребованной экспериментальную проверку теорий. В главе 8 сообщается о проверке уравнения состояния на мосту БКШ–БЭК в широком диапазоне длин рассеяния.

Глава 3

Экспериментальные методы

3.1 Приготовление газа путём лазерного пленения и охлаждения

3.1.1 Обзор процедуры приготовления

Приготовление квантовой системы происходит в несколько этапов и занимает от 7 до 40 секунд. Начинается приготовление с испарения расплавленного лития при температуре $\approx 400^\circ\text{C}$ и заканчивается созданием облака при температуре от 20 нК до 10 мкК. Начальная и конечная температура газа отличаются, таким образом, в 10^{10} раз.

Эксперименты выполнены в Университете имени Дюка и в ИПФ РАН. Установка, созданная в ИПФ РАН, является развитием установки, использовавшейся в Дюке:

- появилась возможность пленения атомного газа в дипольной ловушке с периодически модулированной интенсивностью. Это позволило впервые приготовить 2-мерный ферми-газ атомов [51], описанный в главе 4;
- существенно улучшено разрешение видеосистемы (раздел 3.2), с 5,5 до 1,1 мкм. Это позволяет наблюдать свойства газа непосредственно в ловушке, без выпуска из ловушки и разлёта. Измерения, таким образом, выполняются непосредственно над исследуемой системой, а их интерпретация перестаёт зависеть от теоретической модели разлёта газа. Становится возможным наблюдение локальных свойств, например, флуктуаций плотности, которые чувствительны к квантовой статистике, микросостоянию системы и фазовым переходам. Повышенное разрешение позволило увидеть облака двумерного газа, пленённого в пучностях стоячей волны.

Изменения в установке касаются в первую очередь тех этапов эксперимента, где действия производятся над уже охлаждённым газом атомов. Сама процедура приготовления ультрахолодного газа похожа в обеих установках и изложена здесь на примере установки ИПФ РАН. Наиболее заметное добавление в процедуру охлаждения, используемой в ИПФ РАН, — стадия выпаривания в стоячей волне (подраздел 3.1.3). Экспериментальная система Университета имени Дюка подробно описана в диссертации Джо Кинаста [114].

Приготовление вырожденного газа происходит в вакуумной системе, показанной на рисунке 3.1. Источником газа служит закладка из нескольких граммов твёрдого, изотопически чистого лития-6, помещённого в печь. Перед началом экспериментов литий в печи нагревается до 410°C , что приводит к плавлению металла и увеличению давления паров лития в 10^{24} раз, до 10^{-4} торр. Сопло печи формирует пучок атомов, который попадает в основную вакуумную камеру через зеемановский¹⁾ замедлитель. В основной

¹⁾Pieter Zeeman, 1865–1943

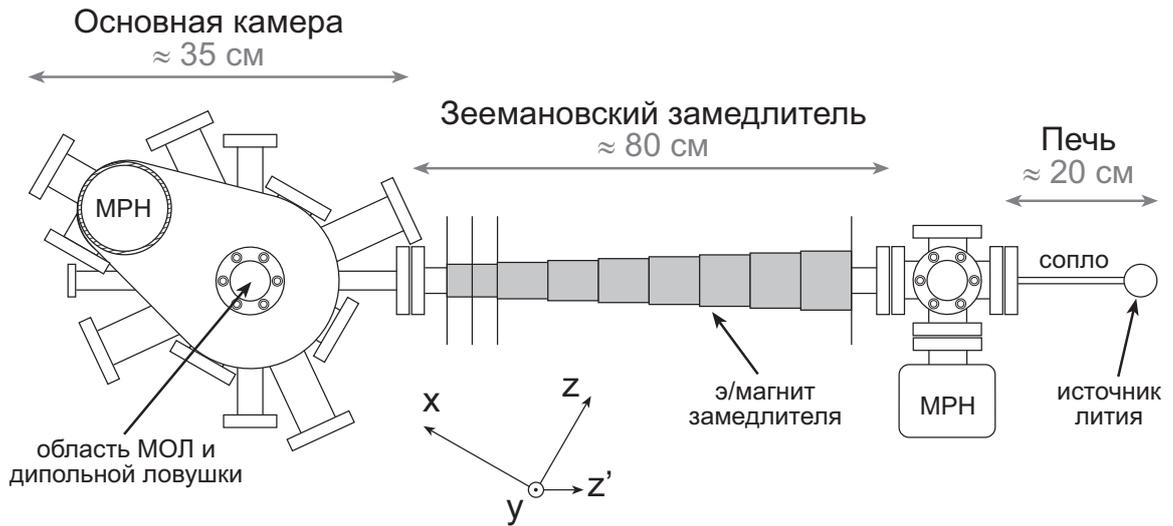


Рисунок 3.1 — Вид сверху на вакуумную систему ИПФ РАН для лазерного пленения и охлаждения атомов лития. МРН — магниторазрядный насос. Намотка электромагнита замедлителя показана серым. Луч оптической дипольной ловушки (раздел 2.4) направлен вдоль z .

камере часть атомов из пучка захватывается в магнитооптическую ловушку (МОЛ) и охлаждается до нескольких 100 мкК. Затем МОЛ выключается и атомы перегружаются в дипольную ловушку, которая пространственно совмещена с МОЛ. В дипольной ловушке происходит охлаждение до конечной температуры. В двух последующих подразделах 3.1.2 и 3.1.3 лазерное охлаждение и пленение рассмотрено более подробно.

Для приготовления не используется магнитная ловушка (подраздел 2.4.4 на странице 30). Это позволило разработать достаточно простую и быструю процедуру пленения и охлаждения газа.

Приготовление газа в основной камере происходит в вакууме при давлении фонового газа $\sim 10^{-11}$ торр. Пучок атомов лития, поступающий от печки через замедлитель не вносит вклад в давление, так как почти любая поверхность при комнатной температуре для лития является гетером. Однако благодаря высокой температуре печи (410°C) давление в области рядом с печью весьма высокое, $\approx 10^{-8}$ торр, и вызвано, скорее всего, отличными от лития газами, которые могут свободно отражаться от стенок вакуумной камеры, выполненных из нержавеющей стали. Низкое давление в вакуумной камере обеспечивается техникой дифференциальной откачки. Натекание газа в основную камеру происходит через длинную тонкую трубу зеемановского замедлителя. Поток газа через неё всего лишь 0,14 л/с. В области печки откачка обеспечивается магниторазрядным насосом с потоком 40 л/с, а в основной камере — комбинацией гетерного слоя со стоком ≈ 500 л/с и магниторазрядного насоса на 75 л/с. Во время эксперимента не используются насосы с движущимися частями, чтобы их вибрация не приводила к нагреву атомного газа в дипольной ловушке.

3.1.2 Охлаждение и пленение резонансным светом

Первые стадии охлаждения и пленения происходят под действием света с частотами близкими к резонансным частотам атома [115]. Используется излучение видимой части спектра с длиной волны 671 нм, лежащей вблизи наиболее сильного электродипольного перехода в литии $2S \rightarrow 2P$. Для дальнейшего изложения полезна диаграмма энергетиче-

ских состояний, показанная на рисунке 3.2. Для охлаждения, пленения и последующей

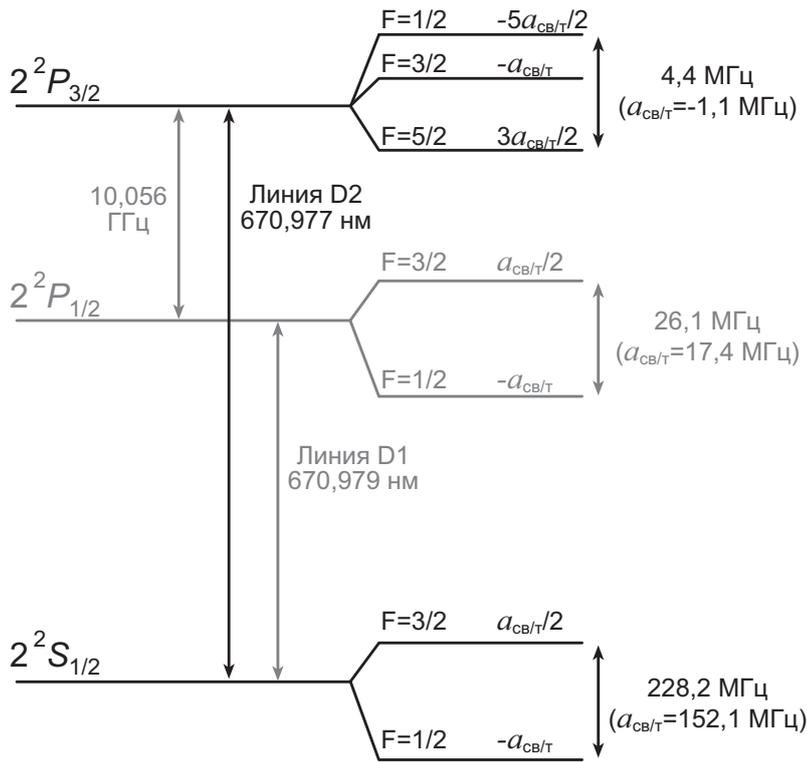


Рисунок 3.2 — Энергетические уровни ${}^6\text{Li}$ — основной $2S$ и возбуждённый $2P$.
Расщепление уровней не в масштабе. Из работы [73].

диагностики используется спектральная линия D2, отвечающая переходу $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{3/2}$.

Источником атомов служит печь, формирующая атомный пучок путём испарения (рисунок 3.1). Из печи пучок попадает в зеemanовский замедлитель [116], где часть атомов тормозится встречным лучом света перед тем как попасть в МОЛ. Торможение необходимо, поскольку тепловая скорость атомов, вылетающих из печи, составляет 1700 м/с . В то же время, МОЛ способна захватывать атомы со скоростью не более 40 м/с . Атомы, влетающие в замедлитель со скоростью $\leq 1400 \text{ м/с}$, к моменту вылета из замедлителя тормозятся до 30 м/с и охлаждаются, что позволяет увеличить фазовую плотность в 10^5 раз и во столько же раз увеличить поток атомов в МОЛ. В системе отсчёта замедляемого атома частота тормозящего света находится в резонансе с закрытым атомным переходом $2S_{1/2}(F_{z'} = \frac{3}{2}) \rightarrow 2P_{3/2}(F_{z'} = \frac{5}{2})$. По мере замедления частота света в системе отсчёта атома уменьшается из-за доплеровского²⁾ смещения. Несмотря на это, атом должен оставаться в резонансе, чтобы торможение происходило до момента вылета из замедлителя. Для этого расстояние между уровнями $2S_{1/2}(F_{z'} = \frac{3}{2})$ и $2P_{3/2}(F_{z'} = \frac{5}{2})$ варьируется в пространстве так, чтобы в точности компенсировать доплеровский сдвиг. Перестройка энергетических уровней достигается благодаря эффекту Зеемана во внешнем магнитном поле, которое параллельно атомному пучку и создаётся катушками электромагнитов соосными с атомным пучком. Катушки электромагнита показаны на рисунке 3.1. Резонансный переход $2S_{1/2}(F_{z'} = \frac{3}{2}) \rightarrow 2P_{3/2}(F_{z'} = \frac{5}{2})$ записан в базисе с осью z' вдоль поля. Направление поля может быть как вдоль атомного пучка, так и против. Луч света в замедлителе расположен соосно с атомным пучком, имеет частоту на 220 МГц ниже частоты перехода $2S_{1/2}(F = \frac{3}{2}) \rightarrow 2P_{3/2}(F = \frac{5}{2})$ и поляризацию σ^+ в базисе z' . Луч

²⁾Christian Andreas Doppler, 1803–1853

сфокусирован в печи. Диаметр луча на конце замедлителя ближнем к МОЛ составляет 1,3 см по уровню интенсивности $1/e$, а мощность ≈ 100 мВт.

Магнитооптическая ловушка (МОЛ) выполнена по традиционной схеме [117], показанной на рисунке 3.3. Охлаждение обеспечивается тремя парами встречных лучей,

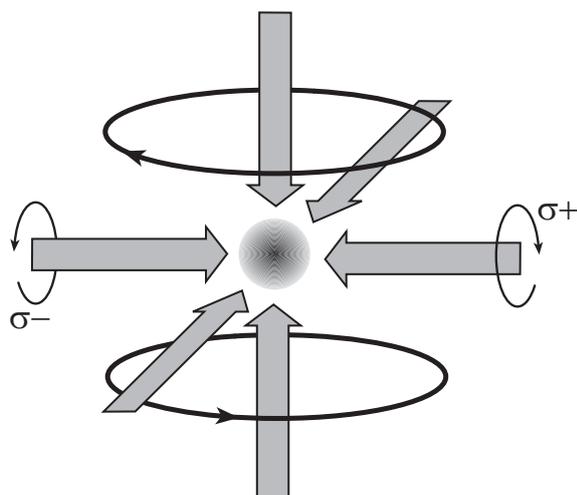


Рисунок 3.3 — Пленение атомного газа в магнитооптической ловушке. Показаны шесть пленяющих лучей, пара магнитных катушек с противоположными токами и облако атомов.

сдвинутыми вниз по частоте от перехода $2S_{1/2}(F = 3/2) \rightarrow 2P_{3/2}(F = 5/2)$ на $5\Gamma_{2P}$, где $\Gamma_{2P} = 2\pi \cdot (6 \text{ МГц})$ — обратное время распада возбуждённых состояний $2P$. Центр формирования ловушки задаётся нулём магнитного поля. Магнитное поле МОЛ линейно возрастает по удалению от центра. Удержание появляется за счёт комбинации сдвига уровней в магнитном поле и ортогональных круговых поляризаций встречных лучей. Пути ввода лучей МОЛ в вакуумную камеру и положение одного из двух электромагнитов МОЛ показаны на рисунке 3.4. МОЛ формируется на 1,5 см выше линии атомного

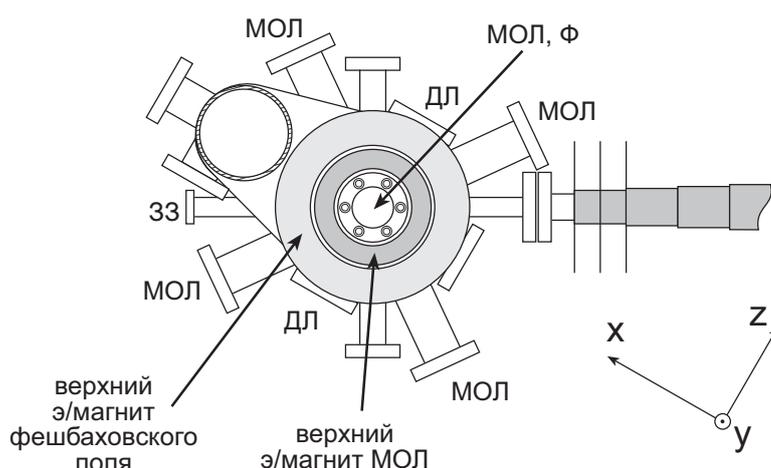


Рисунок 3.4 — Вид сверху на пути ввода лучей МОЛ и положение магнитных катушек. «МОЛ» на рисунке обозначает шлюз для луча МОЛ. «33» — для луча замедлителя. «ДЛ» — для дипольной ловушки. «Ф» — для фотообъектива. Вторая катушка МОЛ, как и вторая катушка для настройки на резонанс Фешбаха, — не видна и находится соосно первой под вакуумной камерой.

пучка, поэтому быстрые атомы из пучка не разрушают МОЛ. Мощность каждого из 6 пленяющих лучей равна ≈ 45 мВт, а диаметр 1–2 см по уровню интенсивности $1/e$. Градиент магнитного поля вдоль вертикального направления y составляет 28 Гс/см.

Специфика лазерного охлаждения лития-6 в сравнении с другими щелочными металлами состоит в малом расщеплении возбуждённого уровня $2P_{3/2}$, которое меньше однородного уширения Γ_{2P} , что можно видеть на диаграмме 3.2. Из-за этого атомы в дополнение к состоянию $2P_{3/2}(F = 5/2)$ легко возбуждаются в состояния $2P_{3/2}(F = 3/2)$ и $2P_{3/2}(F = 1/2)$. Из последних двух состояний атомы переходят в основное состояние $2S_{1/2}(F = 1/2)$ путём спонтанного излучения фотона. Это состояние является тёмным для 6 пленяющих лучей. Попав в него, атом выпадает из-под действия и вязкой, и пленяющей силы. Для выкачивания атомов из тёмного состояния на уровень $2S_{1/2}(F = 3/2)$ необходимо поле перенакачки на частоте перехода $2S_{1/2}(F = 1/2) \rightarrow 2P_{3/2}$. Для остальных щелочных металлов достаточно поле перенакачки с интенсивностью много меньшей, чем у лучей пленения, так как попадание в тёмное состояние для них — маловероятный нерезонансный процесс. В случае лития-6 интенсивность этого поля значительно больше и в описываемой установке составляет 1/3 от интенсивности пленяющих полей. Лучи перенакачки совмещены с пленяющими по пространству и поляризации. О первой МОЛ для лития сообщено в 1991 году [118], через 4 года после первой демонстрации МОЛ [117], в которой использовался натрий.

За 4 секунды в МОЛ накапливается $3 \cdot 10^8$ атомов при температуре ≈ 1 мК. Для эффективной перегрузки в дипольную ловушку температура должна быть снижена. Для этого мощность пленяющих лучей резко снижается в 70 раз, а отстройка от резонанса уменьшается до Γ_{2P} , после чего продолжается охлаждение в течение 10 мс. В результате температура падает до нескольких сотен мК, однако плотность также снижается, поскольку уменьшение интенсивности света приводит к снижению крутизны потенциала МОЛ. Параметры охлаждения в поле малой интенсивности подобраны, чтобы максимизировать число атомов, перегружаемых в дипольную ловушку. В принципе, при охлаждении в свете ещё меньшей интенсивности возможно достижение предельной температуры охлаждения 2-уровневого атома $\hbar\Gamma_{2P}/2 = 150$ мК. Однако это даст слишком низкую плотность, что не выгодно для загрузки дипольной ловушки.

3.1.3 Охлаждение в дипольной ловушке

Дипольная ловушка позволяет достигать существенно меньших температур, чем МОЛ. В отличие от МОЛ, в дипольной ловушке не используется резонансный свет, поэтому температура не ограничена снизу ни пределом охлаждения 2-уровневого атома $\hbar\Gamma_{2P}/2 = 150$ мК [119], ни энергией отдачи при излучения фотона $\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{671 \text{ нм}}\right)^2$ для многоуровневого атома [120, 115].

Центр дипольной ловушки совмещён с центром МОЛ. Дипольная ловушка глубиной 0,2–2 мК создаётся двумя встречными лучами с длиной волны 10,6 мкм и одинаковой циркулярной поляризацией, образующими стоячую волну (рисунок 2.4 на странице 29). Ловушка формируется перекрывающимися фокусами лучей. Дипольная ловушка включается почти одновременно с МОЛ. Это не оказывает влияния на процесс пленения и охлаждения в резонансном свете, поскольку излучение с длиной волны 10,6 мкм приводит к почти одинаковому штарковскому³⁾ сдвигу уровней $2S$ и $2P$. Для перегрузки атомов в дипольную ловушку сначала выключаются лучи перенакачки, а затем, через 150 мкс основные лучи, частота которых близка к переходу $2S_{1/2}(F = 3/2) \rightarrow 2P_{3/2}(F = 5/2)$. Предварительное выключение поля перенакачки позволяет приготовить атомы на уровне

³⁾Johannes Stark, 1874–1957

$2S_{1/2}(F = 1/2)$, то есть в смеси состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Равенство населённостей состояний обеспечивается совмещением центров МОЛ и дипольной ловушки. Рассогласование центров приводит к рассогласованию населённостей. После выключения световых полей МОЛ, в дипольную ловушку перегружается та часть облака, которая пространственно перекрывалась с ней. Часть атомов, не попавших в дипольную ловушку, удерживается магнитным полем МОЛ и улетает после его выключения, которое происходит через 20 мс после выключения световых полей. После выключения МОЛ в пучностях стоячей волны удерживается 1–4 миллиона атомов.

Охлаждение в дипольной ловушке происходит путём выпаривания. Атомы из хвоста теплового распределения покидают ловушку, поскольку их кинетическая энергия больше глубины ловушки. Оставшиеся атомы благодаря столкновениям термализуются уже с меньшей температурой, при этом частицы, заполняющие хвост теплового распределения, снова теряются. Для ускорения выпаривания длина s -волнового рассеяния увеличивается до большой отрицательной величины, например, $a = -4200$ Бор путём включения почти однородного магнитного поля $B = 1000$ Гс, что соответствует настройке столкновений на фермиевскую сторону широкого резонанса Фано–Фешбаха с центром при $B = 834$ Гс. Поле включается в направлении $-y$ парой соосных катушек-электромагнитов, одна из которых видна на схеме 3.4. В течение 1 с газ испаряется и охлаждается в стационарной ловушке. Затем, в течение 0,2 с выключается один из 2 лучей, формирующих стоячую волну. В результате, продолжая испаряться и охлаждаться, газ адиабатически перегружается в веретенообразную дипольную ловушку, образованную сфокусированной бегущей волной. Дальнейшее выпаривание газа продолжается в принудительном режиме: глубина потенциала понижается, что ускоряет испарение и охлаждение. Глубина ловушки уменьшается в 100–2000 раз по закону

$$U(t) = U_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{3,24}. \quad (3.1)$$

Конечная глубина ловушки выбирается сравнимой с химическим потенциалом газа μ . Это даёт наименьшие температуры в единицах $E_{\text{Ф}}$. Быстрота спадания $1/\tau$ выбирается так, чтобы число атомов, остающихся после выпаривания, было максимальным или почти не возрастало при увеличении τ . Чем ближе к резонансу Фешбаха, тем быстрее происходит термализация и тем быстрее можно опускать потенциал. При $B = 1000$ Гс ($a = -4200$ Бор) принудительное выпаривание продолжается от 10 до 20 с, при $B = 834$ Гс ($a = \infty$) — от 4 до 10 с. В результате получается веретенообразное облако газа при температуре $T = (0,05-0,10)E_{\text{Ф}}$. В облаке содержится от 20 000 до 100 000 атомов в каждом из двух равнонаселённых состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$.

Завершающий этап приготовления зависит от эксперимента, который затем проводится с полученным газом. Если эксперимент должен проходить при магнитном поле B на фермиевской стороне резонанса Фешбаха ($B \geq 834$ Гс), то, как правило, выпаривание происходит в этом поле B . Если на бозевской стороне, например, с бозе-эйнштейновским конденсатом молекул, то, как правило, выпаривание проводится на резонансе, а по его окончании поле плавно перестраивается на окончательное значение B , требуемое для эксперимента. В ходе этой перестройки образуется конденсат молекул. Выпаривание на резонансе, а не при окончательном значении поля на бозевской стороне, позволяет избежать неупругих потерь из-за 3-частичных соударений во время выпаривания. Эти потери наиболее выражены на бозевской стороне резонанса [89], а их частота масштабируется с плотностью как n^2 . Благодаря резкому спаданию неупругих столкновений при снижении плотности, эти столкновения существенно подавлены в мелком потенциале в сравнении с более глубоким и плотным удержанием.

Если эксперимент с ферми-газом проводится при 528 Гс, где $a = 0$ [84, 86], то охла-

ждение вблизи резонанса Фешбаха непрактично, так как при перестройке $834 \rightarrow 528$ Гс во-первых, большая часть атомов ассоциировалась бы в молекулы, а во-вторых, система проходила бы через область интенсивных неупругих соударений, ведущих к потерям и нагреву. Поэтому охлаждение происходит при $B = 300$ Гс в области локального максимума $|a|$ при $a = -300$ Бор. При этом выбирается другой закон понижения потенциала:

$$U(t) = U_0 \cdot \left(\frac{1}{1 + t/\tau} \right)^{1,45}, \quad (3.2)$$

а сам процесс выпаривания занимает около 30 с. Кривая выпаривания (3.2) выведена для слабозаимодействующего газа ($n|a|^3 \ll 1$), в котором сечение межатомных столкновения $\sigma = 4\pi a^2$ не зависит от энергии [121]. Кривая (3.1) рассчитана для случая сильных взаимодействий, при которых сечение s -волновых столкновения сходится к унитарному пределу $\sigma = 4\pi/k^2$, зависящему от кинетической энергии [122].

После установки конечного магнитного поля B происходит адиабатическая подстройка потенциала до требуемой глубины. Может оказаться полезным достижение неравенства $\mu \ll U$, что позволяет снизить эффекты, связанные с ангармонизмом потенциала. Для ферми-газа приближённо $\mu \propto \sqrt{U}$, поэтому $\mu/U \propto 1/\sqrt{U}$.

Перегрузка газа в стоячую волну осуществляется при минимальной глубине пленяющего потенциала. Второй луч восстанавливается за $\approx 0,2$ с. После этого принудительное выпаривание продолжается в течение 3,5 с, за которые глубина ловушки снижается в 10 раз по экспоненциальному закону. Затем, потенциал остаётся неизменным в течение 0,5 с, после чего адиабатически, за 2,4 с поднимается до желаемой высоты, что заканчивает процедуру приготовления газа в периодическом потенциале.

3.2 Фотографирование и измерение распределения плотности

Фотографирование является основным методом снятия данных в экспериментах, описанных в диссертации. Все более сложные методы включают в себя фотографирование в качестве составной части. Усовершенствованный метод фотографирования, описанный в этом разделе и работах [65, 51], впервые позволил напрямую измерить распределение плотности каждой спиновой компоненты газа непосредственно в ловушке, с разрешением много меньшим поперечного размера облака.

Прямое измерение профиля плотности в квантовой системе позволяет видеть разделение фаз, величину среднего поля, измерять термодинамические и механические характеристики и, в ряде случаев, фазу коллективной волновой функции. Вообще говоря, в процессе любого измерения состояние системы проецируется на какое-либо множество состояний. Чем полнее это множество, тем больше мы можем узнать в процессе измерения. Примером максимально информативного измерения служит проекция на пространство координат или пространство импульсов. Атомные газы позволяют спроецировать состояние системы на двумерное координатное пространство, причём проецирование происходит селективно по спиновому состоянию. Атомная система — единственная из ферми-систем, допускающая прямое мгновенное наблюдение распределения плотности. В атомной системе это возможно благодаря внутренним степеням свободы атома.

Пример снимка газа, пленённого в веретенообразной дипольной ловушке, приведён на рисунке 3.5. На фото показано распределение плотности, проинтегрированное вдоль луча зрения. Видны частицы только в одном из двух спиновых состояний. Снимок сделан при помощи прибора с зарядовой связью (ПЗС). Для фотографирования атомный газ подсвечивается импульсом широкого однородного луча. Облако атомов поглощает свет,

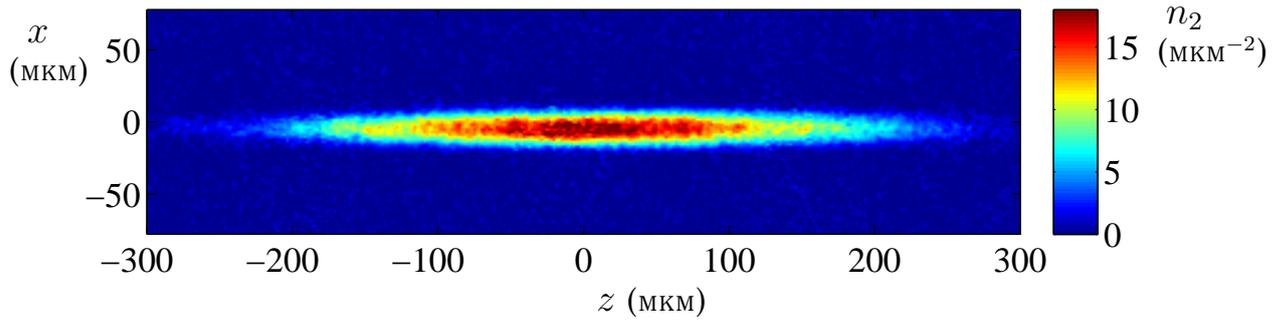


Рисунок 3.5 — Снимок ферми-газа, пленённого в веретенообразном дипольном потенциале. В цвете кодирована погонная концентрация атомов в каждом спиновом состоянии $n_2(x, z)$. В облаке 210 000 атомов. Видна половина атомов — только те, что находятся в состоянии $|1\rangle$.

создавая тень в луче подсвета, который проецируется на ПЗС. Тень в луче подсвета позволяет рассчитать распределение плотности.

Фотографирование обычно происходит в магнитном поле. Это то же поле, с помощью которого перестраивается межатомное взаимодействие. Луч подсвета направлен вдоль оси y — навстречу магнитному полю и поперёк оси z цилиндрической симметрии ловушки. В базисе магнитного поля $x''y''z''$ ($z'' \uparrow \uparrow y$) луч подсвета имеет поляризацию σ^- и частоту в резонансе с циклическим переходом $|1\rangle \rightarrow |2P_{3/2}, J_{z''} = -3/2, I_{z''} = 1\rangle$ или $|2\rangle \rightarrow |2P_{3/2}, J_{z''} = -3/2, I_{z''} = 0\rangle$. Благодаря магнитному полю $B \gg \hbar a_{\text{св}}/\tau/2\mu_B \approx 50$ Гс, эти переходы близки к приближению 2-уровневого атома. Продолжительность импульса подсветки — несколько микросекунд. С одной стороны, за время подсветки атомы не должны существенно сдвинуться, с другой — количество фотонов, поглощённых каждой ячейкой ПЗС, должно быть $\gg 1$, чтобы снизить дробовой шум. Процесс съёмки приводит к разрушению облака. Для повторного измерения система должна быть приготовлена снова.

По поглощению света рассчитывается двумерное распределение концентрации частиц в каждом спиновом состоянии, соответствующее интегралу 3-мерного распределения вдоль направления зрения y :

$$n_2(x, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{I_0}{I(x, z)} + \frac{I_0 - I(x, z)}{\sigma I_{\text{нас}}}, \quad (3.3)$$

где I_0 и $I(x, z)$ — интенсивность луча подсвета до и после прохождения через облако соответственно, σ и $I_{\text{нас}}$ — сечение поглощения и интенсивность насыщения перехода соответственно. Насыщение перехода в формуле (3.3) принимается в расчёт точно, и условие $I_0 \ll I_{\text{нас}}$ не требуется. Обычно используется $I_0 \sim I_{\text{нас}} = 2,54$ мВт/см². Так же при пересчёте поглощения в плотность принимаются во внимание эффекты, приводящие к уменьшению числа видимых атомов:

- а) доплеровский сдвиг резонансной частоты атомов, связанный с ускорением под давлением луча подсвета;
- б) небольшое отличие переходов $|1\rangle, |2\rangle \rightarrow |2P_{3/2}, J_{z''} = -3/2, I_{z''} = 1, 0\rangle$ от циклических, приводящее к медленной накачке атомов в тёмное состояние;
- в) флуоресценция.

Пространственное разрешение определим как радиус аппаратной функции видеосистемы, то есть радиус образа линии нулевой ширины. Радиус будем измерять от центра

функции до первого нуля. Разрешение зависит от глубины объекта. Для объекта нулевой глубины оно равно 1,1 мкм, а для объекта среднеквадратичной полуглубины 14 мкм составляет 2,9 мкм. Столь высокое разрешение достигнуто за счёт использования объектива с большой числовой апертурой $ЧА = 0,29$. Объектив специально спроектирован для безаберрационной съёмки с разрешением на уровне дифракционного предела. Увеличение видеосистемы может варьироваться от 7 до 30. Размер ячейки ПЗС равен 13 мкм. Высокое разрешение позволило сфотографировать газ, пленённый в пучностях стоячей электромагнитной волны. Фотография газа показана на рисунке 3.6. Расстояние между

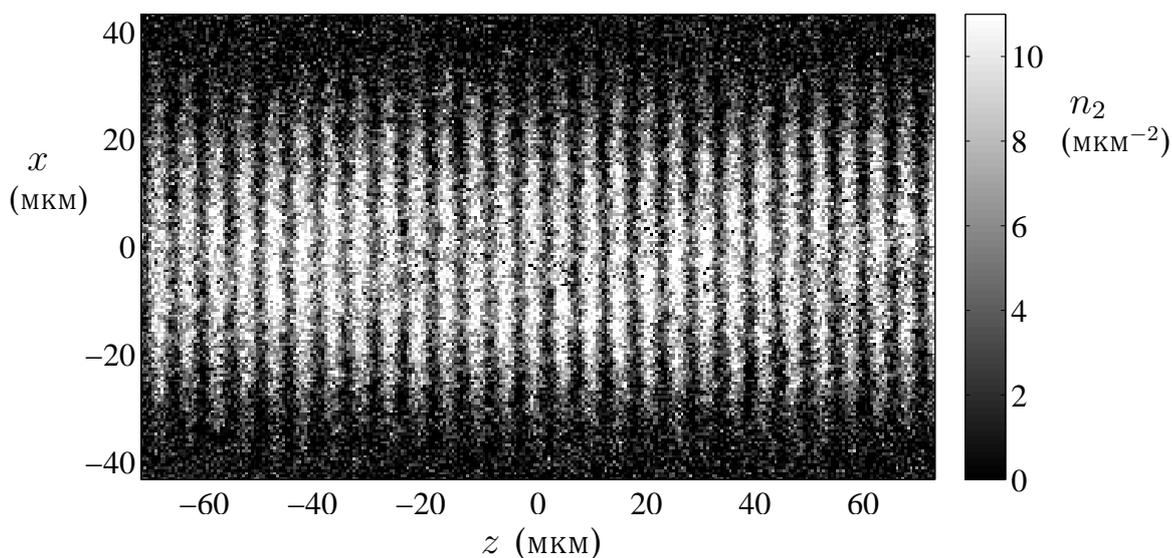


Рисунок 3.6 — Снимок ферми-газа, пленённого стоячей волной. Показано распределение концентрации $n_2(x, z)$. Число атомов в одном спиновом состоянии на квадратный микрон кодировано тоном серого.

центрами пучностей составляет 5,3 мкм.

В экспериментах, выполненных в Университете имени Дюка, использовалась оптическая система с меньшим разрешением, 5,5 мкм, что сравнимо в поперечном размере облака в ловушке. Для того, чтобы в таких условиях сделать снимок максимально информативным, газ перед фотографированием выпускался из ловушки, свободно разлетался, увеличиваясь в размерах, после чего фотографировался. Другая причина выпуска газа перед фотографированием — высокая оптическая плотность облака в ловушке с достаточно большими частотами. Если оптическая плотность близка к 100%, то пересчёт поглощения в плотность по формуле (3.3) не устойчив к ошибкам.

Ранее, в большинстве экспериментов других научных групп атомный газ также фотографировался после выпуска газа из ловушки и последующего разлёта, что во многом было связано с недостаточным оптическим разрешением в экспериментах. Для восстановления начального распределения плотности из таких данных необходима модель разлёта газа, которая существует лишь в 2 случаях: для газа со слабым взаимодействием ($|a|n^{1/3} \ll 1$) и универсальной системы (подраздел 5.3.2 на странице 99). В экспериментах 2 групп фотографии газа непосредственно в ловушке использованы для анализа поперечного распределения плотности. В экспериментах [26, 123], выполненных в Университете имени Райса⁴⁾, пространственное разрешение сравнимо с масштабом изменения плотности в поперечных направлениях. В эксперименте [124] Массачусетского института технологии в ловушке фотографировалась разность плотностей двух спиновых состояний методом

⁴⁾Rice University

фазового контраста. Последний метод чувствителен к разности плотностей спиновых компонент, а не к индивидуальным распределениям плотности каждого спина.

3.3 Дышащая мода облака

Дышащая мода облака в ловушке — это мода колебаний, возникающих при сжатии газа в одном или нескольких направлениях. В экспериментах с веретенообразным облаком использовалась мода сжатия и расширения в радиальном направлении. Наблюдения над дышащей модой оказались чрезвычайно плодотворными, позволив в рамках диссертационной работы установить наличие сверхтекучей фазы, измерить температуру перехода к сверхтекучести, проверить универсальную гипотезу и оценить коэффициент сдвиговой вязкости. Значение частоты дышащей моды позволяет отличить жидкость от газа. Кроме того, по частоте дышащей моды прецизионно измеряется одна из частот пленяющего потенциала (раздел 3.4).

Диаграмма событий для возбуждения и наблюдения моды показана на рисунке 3.7. По окончании приготовления облака, пленяющий потенциал выключается на короткое

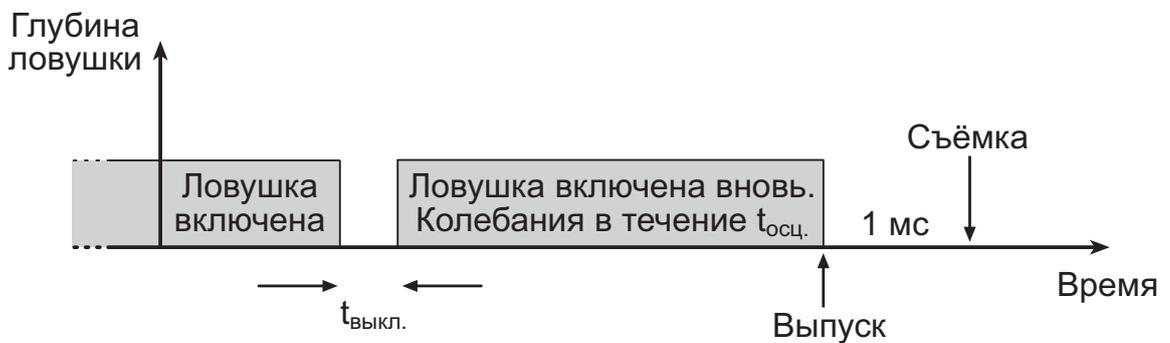


Рисунок 3.7 — Диаграмма событий для возбуждения и наблюдения поперечной дышащей моды облака в веретенообразной ловушке.

время $t_{\text{выкл.}}$, в течение которого облако несколько расширяется. Затем потенциал почти мгновенно восстанавливается. В момент восстановления потенциала облако продолжает расширяться, что приводит к возбуждению моды попеременного расширения/сжатия облака, то есть дышащей моды. Поскольку $t_{\text{выкл.}} \ll 1/\omega_z$, возбуждается только поперечная мода. Размер осциллирует в течение времени $t_{\text{осц.}}$, выбираемого экспериментатором, затем происходит измерение фазы колебаний. Измерения производились при помощи видеосистемы, разрешение которой (5,5 мкм) сравнимо с поперечным размером облака. Прямое измерение размера в ловушке в таких условиях сопряжено с большой ошибкой. Чтобы её избежать, вместо фотографирования непосредственно в ловушке, пленяющий потенциал резко выключался и облако расширялось в течение фиксированного промежутка времени (1 мс) и уже после этого фотографировалось. Затем эксперимент повторялся для другого времени осцилляций $t_{\text{осц.}}$.

На серии фотографий рисунка 3.8 показано разлетевшееся облако для разной продолжительности колебаний $t_{\text{осц.}}$. Зависимость поперечного размера разлетевшегося облака от $t_{\text{осц.}}$ нанесена на график 3.9. Подгоняя данные затухающей синусоидой

$$A e^{-t_{\text{осц.}}/\tau} \cos(\omega t_{\text{осц.}} + \varphi), \quad (3.4)$$

можно найти частоту (ω) и время затухания колебаний (τ). Эти две величины становятся источником знаний о свойствах исследуемой системы. Зачастую в эксперименте частота моды и декремент ($1/\tau$) исследуются как функции от какого-либо параметра, например,

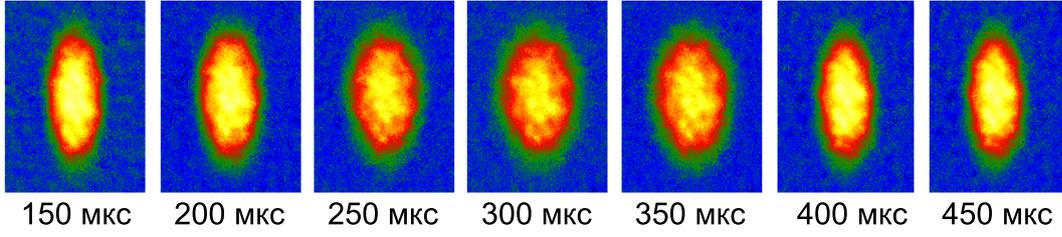


Рисунок 3.8 — Поперечная дышащая мода. Облако атомов после колебаний в ловушке в течение переменного времени $t_{\text{осц.}}$ (подписано под снимками) и последующего разлёта в течение 1 мс.

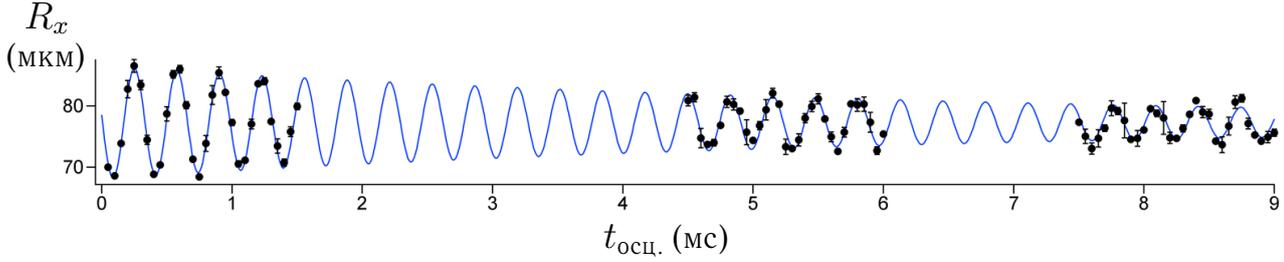


Рисунок 3.9 — Поперечная дышащая мода. Размер разлетевшегося облака в зависимости от продолжительности колебаний $t_{\text{осц.}}$. Данные показаны точками, а подгоночная синусоида (3.4) — линией.

энергии газа. При каждом значении этого параметра эксперимент повторяется несколько раз. Повторения эксперимента для одного и того же значения параметра производятся не подряд, а в случайной последовательности с экспериментами при других значениях этого параметра. Подобный подход позволяет усреднить исходы по небольшим неконтролируемым изменениям в экспериментальной системе, которые могут происходить на временах много больших, чем время единичного эксперимента.

3.4 Измерение параметров потенциала

Параметры внешнего потенциала, удерживающего газ, точно измеримы. Потенциал складывается из поля дипольной ловушки и магнитного потенциала $U_B(\vec{x})$, возникающего из-за слабой неоднородности магнитного поля \vec{B} , используемого для перестройки взаимодействий. Основную роль играет дипольный потенциал. При удержании в стоячей волне наличием магнитного потенциала можно пренебречь. Потенциал $U_B(\vec{x})$ проявляет себя лишь при удержании в неглубоком веретенообразном дипольном потенциале — аксиальное удержание (вдоль z) обеспечивается в основном кривизной магнитного поля. Центры кривизны магнитного поля и дипольного потенциала совмещены. Дипольный потенциал описан в разделе 2.4 на странице 27.

Рассмотрим подробнее магнитный потенциал, имеющий вид

$$U_B = -\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle \cdot \vec{B}, \quad (3.5)$$

где $\langle \hat{\vec{\mu}} \rangle$ — ожидаемое значение оператора магнитного момента атома. Магнитное поле за счёт геометрии электромагнитов обладает небольшой кривизной, что даёт гармоническое удержание поперёк поля, в направлениях $\pm x$ и $\pm z$, и отталкивание параллельно полю, в направлениях $\pm y$. В больших магнитных полях ($B \gg \hbar a_{\text{св/т}}/2\mu_B \approx 50$ Гс)

$$\langle 1 | \hat{\vec{\mu}} | 1 \rangle \approx \langle 2 | \hat{\vec{\mu}} | 2 \rangle \approx -\mu_B \vec{y}_0. \quad (3.6)$$

В результате, магнитный потенциал может быть записан в виде

$$U_B = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \Big|_{\vec{x}=0} \mu_B \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - y^2 \right). \quad (3.7)$$

При получении последнего выражения использована симметрия магнитного поля относительно оси y и соотношение $\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = -2\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -2\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$ в центре кривизны поля. Из выражения (3.7) видно, что частота магнитного потенциала в направлении z , то есть вдоль веретенообразной дипольной ловушки, равна

$$\omega_B = \sqrt{\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \frac{\mu_B}{m}}. \quad (3.8)$$

Частота может быть как измерена напрямую, так и вычислена по геометрии электромагнитов и току. Для измерения частоты газ готовится в дипольной ловушке, сдвинутой в плоскости xz от центра кривизны магнитного поля. Затем газ выпускается из дипольной ловушки и движется в потенциале $U_B(\vec{x})$. Для наблюдателя, смотрящего в направлении y , движение центра облака выглядит как гармонические колебания в плоскости xz с циклической частотой ω_B . Частота измерена по наблюдению чуть более половины периода колебаний и в поле 800 Гс составила

$$\omega_B = 2\pi \cdot (12,3 \pm 0,3 \text{ Гц}), \quad (3.9)$$

что также согласуется расчётами на основе геометрии электромагнитов и величины тока. В достаточно больших полях ($B \gg \hbar a_{\text{св/т}}/2\mu_B \approx 50$ Гс) частота масштабируется с магнитным полем как \sqrt{B} . Значение ω_B позволяет полностью охарактеризовать магнитный потенциал.

Перейдём к измерениям характеристик дипольного потенциала. Форма дипольного потенциала повторяет распределение интенсивности в электромагнитной волне. Все 3 частоты могут быть прецизионно измерены при помощи разновидностей метода параметрического резонанса [125] и наблюдения за дышащей модой идеального ферми-газа. Прежде описания специфики измерения приведём характерные значения частот:

- веретенообразная ловушка, сформированная фокусом бегущей волны, из работы [7], глубина 4,6% от полной — $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10 \text{ Гц})$, $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 71 \pm 3 \text{ Гц}$;
- дископодобная ловушка, сформированная пучностью стоячей волны, из работы [51], глубина 0,5% от полной — $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (102 \pm 4 \text{ Гц})$, $\omega_x/\omega_y = 1,00 \pm 0,05$, $\omega_z/2\pi = 5570 \pm 100 \text{ Гц}$.

В веретенообразной ловушке частота ω_x с наибольшей точностью измеряется по частоте дышащей моды идеального ферми-газа, при $B = 528$ Гс. Собственная частота моды равна $2\omega_x$. Фактически мода является независимыми колебаниями частиц в потенциале. Потенциал дипольной ловушки в области движения частиц чуть отличен от гармонического, что делает частоту моды чуть ниже $2\omega_x$. Влияние ангармонизма точно контролируется и соответствующие поправки рассчитываются (приложение Б).

Частота ω_y не может быть измерена тем же способом, так как колебания в этом направлении не видны при съёмке. Поэтому она измерялась методом параметрического резонанса. Мощность инфракрасного луча, создающего ловушку, модулировалась на частоте ν , что приводило к такой же модуляции потенциала:

$$U(\vec{x}) \rightarrow (1 + h \sin \nu t) U(\vec{x}), \quad (3.10)$$

где $h \ll 1$. При $\nu = 2\omega_y$ в идеальном ферми-газе наступает параметрический резонанс, приводящий к росту энергии атомов и, иногда [125], к потерям атомов из ловушки. Обнаружение резонанса по потерям менее точно, чем по росту энергии, из-за большего проявления ангармонизма ловушки. Для того, чтобы увидеть рост энергии в направлении y , по окончании параметрической накачки включаются столкновения, в результате чего энергия перераспределяется между всеми тремя направлениями. После этого прирост энергии может быть зафиксирован по увеличению размеров облака или изменению его формы.

Продольная частота веретенообразной ловушки ω_z также измерялась по параметрическому резонансу. Резонанс наступает при частоте $2\sqrt{\omega_z^2 + \omega_B^2}$, так как продольное пленение — результат совместного действия оптического и магнитного потенциала. Из значения резонансной частоты находится ω_z . При измерении малых частот относительная неопределённость растёт. Это связано с тем, что скорость резонансного ввода энергии пропорциональна ν^2 [126, 127]. Из-за этого, для достижения наблюдаемого роста энергии приходится увеличивать амплитуду накачки h , что в свою очередь уширяет линию резонанса, а следовательно и неопределённость измерения. В мелких веретенообразных ловушках при $\omega_z/2\pi < 20$ Гц частота становится практически неизмеримой. В этом случае ω_z определяется так: частота оптической ловушки измеряется для значительно более глубокой ловушки, а затем масштабируется $\propto \sqrt{U_0}$.

Зная частоты, можно рассчитать глубину веретенообразного оптического потенциала. Если форма ловушки не далека от цилиндрически симметричной, то расчёт может быть выполнен по формуле (2.20).

В дископодобной ловушке все частоты измерены по параметрическому резонансу, путём наблюдения за размерами облака. Для измерения ω_z газ приготавливается в нижней (0-ой) зоне Блоха. Параметрический резонанс населяет 2-ую зону. На этом процесс возбуждения прекращается, так как переход в 4-ую зону лежит не в резонансе из-за ангармонизма. Для того, чтобы найти глубину дископодобной ловушки, достаточно измерить лишь частоту ω_z , что видно из формулы (2.25).

3.5 Энерго- и термометрия

3.5.1 Равнозначность измерения температуры и энергии

Экспериментальная физика атомных ферми-газов появилась сравнительно недавно. Первый ферми-газ [1] был приготовлен менее, чем за 4 года до того, как автор начал работать в этой области. Наблюдение новых явлений шло рука об руку с созданием новых экспериментальных методов, которые и сделали эти наблюдения возможными. В этом разделе 3.5 описан первый метод энергометрии универсальной ферми-системы, новый метод термометрии для такой же системы, а также применение уже известного метода термометрии к почти идеальному ферми-газу.

В термодинамической системе не важно, какой параметр измеряется — энергия или температура. С точки зрения теоретической физики предпочтения между энергией и температурой отсутствуют. Исторически, для сильновзаимодействующего газа необходимость в измерении энергии появилась из-за отсутствия метода термометрии, независимого от теоретической модели. Позже без участия автора был разработан способ модельнонезависимого определения температуры по известной энергии [69].

3.5.2 Термометрия почти идеального ферми-газа

Идеальный классический газ, помещённый в сферически симметричный гармонический потенциал, при любой T имеет гауссово распределение плотности:

$$n(\vec{x}) = e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2T}} N \left(\frac{m\omega^2}{2\pi T} \right)^{3/2}. \quad (3.11)$$

Температура классического газа пропорциональна квадрату размера облака. Фактически этот размер может служить термометром.

В идеальном ферми-газе температура тоже может быть определена по распределению плотности. Однако при измерении температуры измеряется не только размер облака, но и форма распределения. Причём, при $T \leq 0,4 E_\Phi$ изменение формы более очевидно, чем изменение размера. Зависимость формы профиля от температуры обсуждается в разделе 2.5 и показана на рисунке 2.5б на странице 32. Температура может быть найдена путём подгонки распределения плотности теоретическим профилем с варьируемой температурой.

Продемонстрируем термометрию на примере снимка идеального ферми-газа (рисунок 3.5). Проинтегрируем это распределение плотности вдоль z , получив одномерное распределение, показанное на рисунке 3.10. Теоретический профиль для подгонки получим,

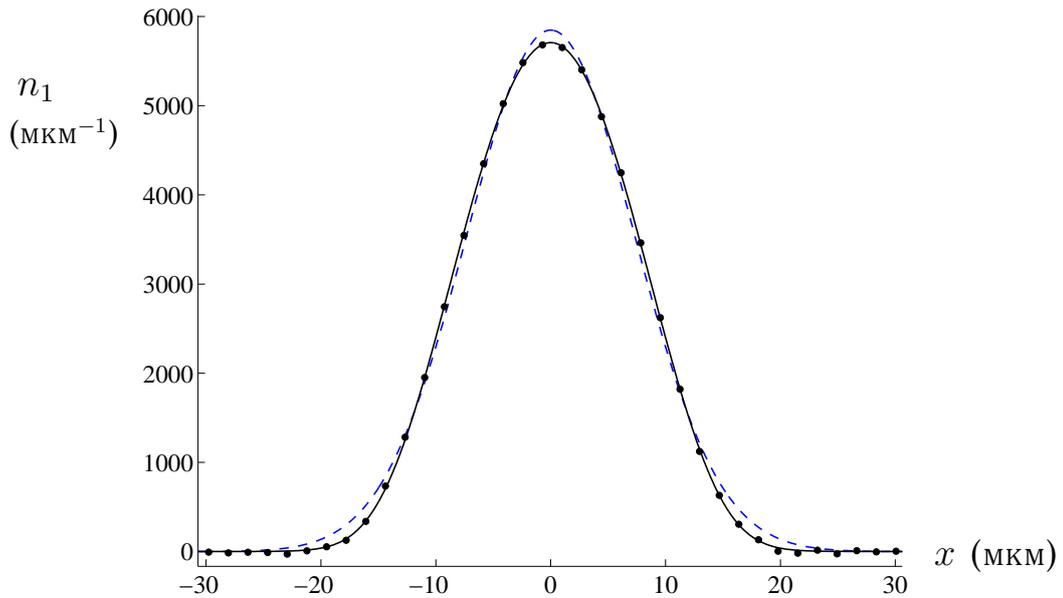


Рисунок 3.10 — Линейное распределение плотности, равное $\int n(\vec{x}) dy dz$. Точками показаны данные, чёрной сплошной линией — подгонка данных профилем Томаса–Ферми (3.12), пунктирной — подгонка гауссовым распределением.

проинтегрировав 3-мерный профиль (2.38) вдоль y и z :

$$n_1(x) = -\frac{6N}{\sqrt{\pi}R_x} \left(\frac{T}{E_\Phi} \right)^{5/2} \text{Li}_{5/2} \left(-\exp \frac{\frac{\mu}{E_\Phi} - \frac{x^2}{R_x^2}}{T/E_\Phi} \right), \quad (3.12)$$

где $R_x = \sqrt{2E_\Phi/m\omega_x^2}$ — радиус Томаса–Ферми в направлении x , а μ — глобальный химический потенциал, который находится самосогласованно из уравнения (2.33). При подгонке варьируются 2 параметра: T/T_F и R_x . Полученная при подгонке кривая показана на рисунке 3.10 сплошной линией. Наилучшая подгонка достигается при $T/E_\Phi = 0,17 \pm 0,02$. Подставляя в E_Φ значения частот $\omega_\perp/2\pi = 415 \pm 20$, $\omega_z/2\pi = 21 \pm 2,5$ и число

частиц в каждом спиновом состоянии $N = 105\,000$, можно найти абсолютную величину температуры $T = 107 \pm 15$ нК.

Классический профиль приближает данные существенно хуже, чем профиль Томаса–Ферми. На том же рисунке 3.10 штрихованной линией показана подгонка данных гауссовым распределением с варьируемой дисперсией и амплитудой. Гауссова функция отстоит от данных как в центре, так и на краях. Среднеквадратичное отклонение в 5,0 раз больше, чем при подгонке профилем Томаса–Ферми.

Вообще говоря, данные рисунка 3.10 можно было бы подогнать, имея лишь один свободный параметр T/E_F вместо двух. Тем не менее, выполнена подгонка с двумя свободными параметрами, поскольку отсутствуют точные значения частот. Независимое варьирование этих величин также полезно при определении температуры при наличии среднего поля. В этом случае радиус Томаса–Ферми отличен от соответствующей величины для идеального ферми-газа. При $T/E_F < 0,4$ параметры T/E_F и R_x слабо коррелированы, что позволяет варьировать их независимо. При больших температурах, когда профиль почти не отличим от гауссова, эти два параметра сильно коррелированы. Их синхронное изменение не ведёт к очевидной смене подгоночной кривой — профиль автомоделен по величине $R_x^2 T/E_F$, что видно, например, в формуле (3.11). Поэтому при $T/E_F > 0,4$ для определения температуры, радиус Томаса–Ферми должен быть зафиксирован. Для идеального газа это можно сделать, зная частоты. В других случаях — измерив этот радиус при $T \approx 0$.

Термометрия идеального и слабо неидеального ферми-газа по профилю плотности была применена в работах [128, 52, 46], выполненных без участия автора диссертации. Новизна изложенных здесь измерений состоит в том, что впервые температура измерена по поперечному профилю плотности газа непосредственно в ловушке. Газ не выпускался из ловушки и не разлетался перед измерением. То есть измерение произведено непосредственно над изучаемой системой.

3.5.3 Термометрия универсального ферми-газа

Эмпирическая термометрия по профилю плотности

Термометрия идеального ферми-газа возможна благодаря тому, что профиль плотности известен из теории при $\forall T/E_F$. Распределениями плотности являются профили Томаса–Ферми (2.38) и (3.12).

Для универсального ферми-газа непротиворечивая теория отсутствует. Несогласие между современными теориями очевидно из таблицы 2.2 на странице 48, в которой сведены значения $T_{кр.}/\varepsilon_F$, найденные в рамках различных моделей. Максимальное и минимальное предсказание отличаются почти вдвое. Таким образом, из распределения плотности при нынешнем развитии теории невозможно точно узнать температуру.

Однако измерение распределения плотности позволяет построить эмпирический термометр. Эмпирической температурой назовём величину $(T/E_F)_{эмп.}$, про которую известно лишь, что она монотонно зависит от термодинамической температуры T (или от T/E_F). В основе метода лежит наблюдение — на резонансе Фешбаха профиль плотности похож на распределение Томаса–Ферми. Более того, для $T = 0$ это доказано в рамках универсальной гипотезы в подразделе 2.7.2 на странице 48. Будем подгонять линейный профиль плотности сильновзаимодействующего ферми-газа моделью подобной уравнениям (3.12) и

(2.33) идеального ферми-газа

$$n_1(x) = -A \operatorname{Li}_{5/2} \left(-\exp \frac{\frac{\mu}{\mu_{\text{осн.}}} - \frac{x^2}{R_x^2}}{(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}} \right), \quad (3.13)$$

$$1 = -6 \left(\left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} \right)^3 \operatorname{Li}_3 \left(-\exp \frac{\mu/\mu_{\text{осн.}}}{(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}} \right). \quad (3.14)$$

При подгонке варьируется эмпирическая температура $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$, а отношение $\mu/\mu_{\text{осн.}}$ вычисляется из второго уравнения. Для неидеального газа $\mu_{\text{осн.}} \neq E_{\Phi}$. Общая амплитуда A независимо варьируется при подгонке и позволяет найти число атомов:

$$N = A \frac{\sqrt{\pi} R_x}{6} \left(\left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} \right)^{-5/2}. \quad (3.15)$$

Этот способ нахождения числа частиц более устойчив к шуму в изображении, чем интегрирование $N = \int n_1(x) dx$.

Радиус Томаса–Ферми R_x может варьироваться независимо при небольших эмпирических температурах, $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} < 0,4$. Это позволяет найти универсальный параметр β благодаря соотношениям $R_x = \sqrt{2\mu_{\text{осн.}}/m\omega_x^2}$ и $\mu_{\text{осн.}} = E_{\Phi}\sqrt{1+\beta}$ (подраздел 2.7.2 и раздел 5.2 на странице 94). При больших температурах R_x необходимо фиксировать при подгонке, поскольку профиль почти автомоделен по величине $R_x^2 (T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ при $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} > 0,4$.

В рамках модели универсального ферми-газа, эмпирическая шкала температур $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ может быть соотнесена с абсолютной T/E_{Φ} . Для этого при каждом T/E_{Φ} с помощью этой модели должен быть рассчитан профиль плотности, который затем будет подогнан уравнениями (3.13) и (3.14), что даст $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$. Подобная калибровка была произведена в рамках теории, использующей на резонансе состояние (2.100) из теории Бардина–Купера–Шриффера, а также учитывающей наличие молекул в синглетном канале и их взаимодействие с куперовскими парами [97, 5]. Результат калибровки показан на рисунке 3.11. Видно, что эмпирическая шкала является монотонной, что согласуется

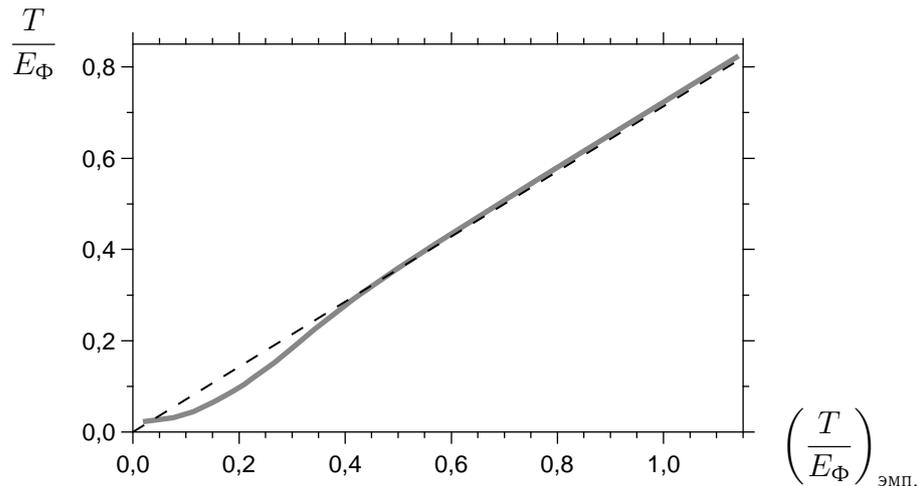


Рисунок 3.11 — Пример калибровки эмпирического термометра. Пересчёт эмпирической температуры $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ в термодинамическую T/E_{Φ} показан сплошной линией.

Штриховая — асимптота (3.16). Из работы [97].

и с определением эмпирического термометра, и с экспериментом. Действительно, при повышении энергии газа наблюдалось увеличение $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$.

С увеличением температуры свойства универсального газа должны всё более приближаться к свойствам идеального. Поэтому любая процедура калибровки должна давать асимптоту

$$\frac{T}{E_{\Phi}} = \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} \sqrt{1 + \beta}, \quad (3.16)$$

которая, как мы видим, присутствует в калибровке на рисунке 3.11. Асимптота передаёт данную калибровку почти точно для $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} \geq 0,4$. Таким образом, калибровка перестаёт зависеть от конкретной модели микросостояния газа, выше некоторой температуры. Рассмотренная модель предполагает, что эта температура может быть относительно невысока. Справедливость этой модели подтверждена термодинамическими измерениями, приведёнными в разделе 7.3 на странице 129.

Асимптота (3.16), дающая модельнонезависимую часть калибровки основана на гипотезе об универсальности ферми-газа с резонансными s -волновыми соударениями и конкретной величине универсальной постоянной β . Последовательной проверке универсальности и измерению β посвящена глава 5. Значение β измерено двумя способами — результаты даются формулами (5.4) и (5.6).

Количественная интерпретация данных, полученных с помощью эмпирического термометра, зависит от модели калибровки. С уточнением теоретической модели возможна всё более точная интерпретация. Калибровка эмпирического термометра, показанная на рисунке 3.11, аналогична калибровке традиционного ртутного термометра, в котором высота столбика ртути соотносится с T . Здесь $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ играет роль высоты столбика ртути.

Описанный метод эмпирической термометрии опирается на измерение плотности газа в ловушке. Использовалась оптическая система с разрешением $\approx 5,5$ мкм, что не позволяло видеть газ непосредственно в ловушке. Облако фотографировалось после разлёта. По этим данным рассчитывался профиль плотности в ловушке. Для универсальной системы можно доказать, что разлёт является автомодельным при условии локальной изоэнтропийности потока, то есть при условии, что сверхтекучая и нормальная компоненты не совершают относительного движения. Это предположение логично для случая свободного разлёта. Обоснованность модели универсальной изоэнтропийной гидродинамики экспериментально проверена в подразделе 5.3.2 на странице 99 для широкого диапазона температур. Изложенный метод термометрии впервые опубликован автором диссертации и коллегами [97].

Другой способ эмпирической термометрии реализован в Университете Инсбрука [129]. Сильновзаимодействующий газ был адиабатически преобразован в бозе-газ слабо взаимодействующих молекул. Температура последнего, $T_{\text{мол.}}$, может быть найдена по числу сконденсированных молекул $N_{\text{конд.}}$:

$$\frac{N_{\text{конд.}}}{N} = 1 - \left(\frac{T_{\text{мол.}}}{T_{\text{кр.}}} \right)^3. \quad (3.17)$$

В идеальном бозе-газе температура конденсации [130]

$$T_{\text{кр.}} = \hbar(\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} = 0,52 E_{\Phi}, \quad (3.18)$$

где $\zeta(3) \approx 1,20$ — дзета-функция от 3. Число сконденсированных молекул может быть найдено, подгоняя распределение линейной плотности бимодальным профилем — суммой ноль-температурного профиля Томаса–Ферми для бозе газа и гауссовой функции, — как это делалось в работах по бозе-эйнштейновской конденсации атомов. В простейшем приближении конденсат описывается профилем Томаса–Ферми, а надконденсатная

часть — гауссовым распределением. Благодаря адиабатичности преобразования атомного газа в молекулярный, температура ферми-газа может быть рассчитана из условия

$$S_{\text{мол.}}(T_{\text{мол.}}) = S(T). \quad (3.19)$$

Для расчёта $S(T)$ необходима непротиворечивая теория, которая на данный момент отсутствует. Таким образом, изложенный в работе [129] метод термометрии зависит от применяемой теоретической модели. Метод ограничен по температуре сверху, поскольку требует наличия конденсата в газе молекул. Также метод может быть подвержен систематической ошибке, известной из экспериментов по бозе-эйнштейновской конденсации атомов — подгонка бимодальным профилем недооценивает число сконденсированных молекул, поскольку несконденсированные молекулы вытесняются из области конденсата средним полем.

Абсолютная термометрия

В принципе, измерение температуры может быть построено на её термодинамическом определении

$$\frac{1}{T(E_{\text{полн.}})} = \frac{dS_{\text{полн.}}(E_{\text{полн.}})}{dE_{\text{полн.}}}. \quad (3.20)$$

Для этого необходимо выполнить независимые измерения полной энергии $E_{\text{полн.}}$ и энтропии $S_{\text{полн.}}$ газа в ловушке. О первом и единственном на данный момент методе измерения энергии сообщается в следующем подразделе 3.5.4. Метод не опирается на какую-либо модель микросостояния. Модельно-независимый метод измерения энтропии недавно продемонстрирован в Университете имени Дюка без участия автора диссертации [69]: измерена зависимость $S(E)$, где $S \equiv S_{\text{полн.}}/2N$ и $E \equiv E_{\text{полн.}}/2N$ — соответственно энтропия и энергия, приходящаяся на один атом. Для вычисления производной (3.20) данные $S(E)$ должны быть параметризованы с помощью гладкой или кусочно гладкой функции. В диссертации [131] предложена следующая зависимость T от энергии, приходящейся на частицу газа:

$$\left. \frac{T}{E_{\text{Ф}}} \right|_{E < E_{\text{кр.}}} = 0,28 \left(\frac{E}{E_{\text{Ф}}} - 0,48 \right)^{0,26}, \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{T}{E_{\text{Ф}}} \right|_{E > E_{\text{кр.}}} = 0,21 \left(5,84 \left(\frac{E}{E_{\text{Ф}}} - 0,83 \right) + 1 \right)^{0,64}. \quad (3.22)$$

Зависимость приведена на двух интервалах, выше и ниже энергии сверхтекучего перехода $E_{\text{кр.}} = 0,83 E_{\text{Ф}}$, измеренной в работе [69]. Соотношения позволяют вычислять температуру по энергии, которая измерима напрямую модельнонезависимым способом, описанным в подразделе 3.5.4.

Группа из Массачусетского института технологии предложила метод [132], который пригоден для системы с существенно различной населённостью спиновых состояний. На краях облака, где находится идеальный ферми-газ, состоящий из одной спиновой компоненты, пространственное распределение может быть подогнано профилем Томаса–Ферми, откуда может быть найдена температура. Метод требует наличия области, заполненной идеальным ферми-газом и пригоден лишь для низких температур, при которых край облака существенно отличается от гауссова распределения.

3.5.4 Энергометрия универсального ферми-газа

Метод энергометрии, описываемый в этом подразделе, открыл возможность модельнонезависимых измерений в термодинамике универсального ферми-газа. Модельнонеза-

висимое измерение температуры, основанное на соотношении $T = dE_{\text{полн.}}/dS_{\text{полн.}}$ [69], опирается на этот метод.

В основе измерения энергии лежит вириальная теорема. Доказательство и экспериментальная проверка теоремы приведены в подразделе 5.3.3 на страницах 104–107. Для универсального газа в гармонической ловушке теорема принимает тот же вид, что и для идеального ферми-газа:

$$E = 2 \langle U(\vec{x}) \rangle, \quad (3.23)$$

где $E = E_{\text{полн.}}/2N$ — энергия, приходящаяся на одну частицу, а $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по распределению концентрации,

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{N} \int \dots n(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (3.24)$$

В предположении локальной однородности

$$\omega_x^2 \langle x^2 \rangle = \omega_y^2 \langle y^2 \rangle = \omega_z^2 \langle z^2 \rangle, \quad (3.25)$$

что позволяет привести вириальную теорему (3.23) к виду

$$E = 3m\omega_x^2 \langle x^2 \rangle = 3m\omega_z^2 \langle z^2 \rangle. \quad (3.26)$$

Величины $\langle x^2 \rangle$ и $\langle z^2 \rangle$ измеримы в эксперименте непрямым, на основе снимков газа, и, таким образом позволяют узнать энергию.

Формула $E = 3m\omega_z^2 \langle z^2 \rangle$ особенно удобна для вычисления энергии газа в веретенообразной ловушке. Не нужно знать полное распределение плотности, необходимо лишь распределение вдоль длинного направления z . Величина $\langle z^2 \rangle$ может быть измерена без использования системы высокого разрешения и фотографирования газа непосредственно в ловушке. Газ может быть выпущен из ловушки и сфотографирован после разлёта, что сохранит распределение $n_1(z) = \int n(\vec{x}) dx dy$, поскольку при разлёте универсального газа в широком интервале температур размер вдоль z меняется крайне медленно. Разлёт газа обсуждается в подразделе 5.3.2 на странице 5.3.2. Описанный метод энергетрии впервые предложен и реализован автором диссертации и коллегами [133].

3.6 Прецизионный ввод энергии

Впервые реализованный метод приготовления унитарного ферми-газа с заданной энергией изложен в этом разделе. Метод основан на приготовлении газа в основном состоянии и последующем точном добавлении энергии. Обоснование метода не требует применения вириальной теоремы, что позволило проверить универсальную гипотезу и вириальную теорему при конечных температурах. Этим проверкам посвящён подраздел 5.3.3 на странице 104. Также здесь описано приготовление идеального ферми-газа при заданной энергии.

Начнём с описания ввода энергии в универсальный ферми-газ. В состоянии близком к основному, с энергией $E_{\text{полн.}} \approx E_{\text{осн.}}$, газ готовится путём выпаривания в дипольном потенциале, как описано в подразделе 3.1.3. Измерение энергии основного состояния для газа в унитарном режиме взаимодействия $E_{\text{осн.}} = \frac{3}{2}NE_{\Phi}\sqrt{1+\beta}$ эквивалентно измерению параметра β . Измерения по размеру облака и по скорости звука описаны в разделе 5.2 на странице 94.

Энергия добавляется путём выключения пленяющего потенциала на время $t_{\text{выкл.}}$ и последующего восстановления потенциала, подобно возбуждению дышащей моды, описанному в разделе 3.3. За время, пока потенциал выключен, газ расширяется. Это приводит

к тому, что в момент восстановления потенциала потенциальная энергия больше, чем до выключения. После восстановления потенциала в газе возбуждается дышащая мода. По мере затухания колебаний энергия перераспределяется между потенциальной, кинетической и энергией взаимодействия, а система приходит в термодинамическое равновесие, что завершает процесс приготовления. Добавка к энергии облака ΔE может быть рассчитана по возрастанию потенциальной энергии за время $t_{\text{выкл.}}$:

$$\Delta E = 2 \int (n(\vec{x}, t_{\text{выкл.}}) - n_{\text{осн.}}(\vec{x})) U(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (3.27)$$

Коэффициент 2 в последней формуле появился из-за суммирования по 2 равнонаселённым спиновым состояниям. Профиль плотности в основном состоянии $n_{\text{осн.}}(\vec{x})$ задаётся формулой (2.106). Разлёт унитарного газа, приготовленного в основном состоянии, происходит автомодельно, как показано в подразделе 5.3.2 на странице 99. Распределение плотности изменяется как

$$n(\vec{x}, t) = \frac{n_{\text{осн.}}(x/b_x, y/b_y, z/b_z)}{b_x b_y b_z}, \quad (3.28)$$

где $b_i(t)$ — коэффициенты масштабирования ($b_i(0) = 1$), которые могут быть найдены из уравнения (5.26) или уравнений (5.27) и (5.28). Благодаря условию $\omega_z \ll \omega_{\perp}$ разлёт происходит в ортогональном направлении ($b_z(t) \approx 1$), и добавка к энергии равна

$$\Delta E = (b_{\perp}^2(t_{\text{выкл.}}) - 1) 2N \langle U(\vec{x}) \rangle. \quad (3.29)$$

В основном состоянии

$$2N \langle U(\vec{x}) \rangle = E_{\text{осн.}}/2. \quad (3.30)$$

Это можно установить прямым интегрированием, без использования вириальной теоремы (3.23), поскольку профиль $n_{\text{осн.}}(\vec{x})$ известен из выражения (2.106). Кроме того, в приближении локальной однородности, в начальном состоянии энергия равномерно распределена между направлениями x , y , z . В результате, энергия после нагрева основного состояния равна

$$E_{\text{полн.}}(t_{\text{выкл.}}) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} b_{\perp}^2(t_{\text{выкл.}}) \right) E_{\text{осн.}}. \quad (3.31)$$

В эксперименте происходит нагрев газа не из основного состояния, а из состояния с малой, но отличной от нуля температурой, которая по эмпирической шкале (подраздел 3.5.3) составляет $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}} \approx 0,04$. Учтём это, введя поправочный коэффициент η в выражение для энергии:

$$E_{\text{полн.}}(t_{\text{выкл.}}) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} b_{\perp}^2(t_{\text{выкл.}}) \right) \eta E_{\text{осн.}}. \quad (3.32)$$

Вычислим коэффициент η , предположив, что он совпадает с коэффициентом для идеального ферми-газа в выражении (2.37):

$$\eta = 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{T}{E_{\text{Ф}}} \right)^2. \quad (3.33)$$

Далее для вычисления η сделаем приближение $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}} \approx T/E_{\text{Ф}}$ и получим

$$\eta \approx 1,01. \quad (3.34)$$

Таким образом, наличие коэффициента η , а тем более и ошибка в его вычислении, слабо влияет на вычисление энергии, при которой приготовлен газ.

Ввод энергии в идеальный ферми-газ происходит аналогично. Газ приготавливается при наименьшей температуре в виде смеси 2 равнонаселённых спиновых состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Энергия добавляется путём выпуска газа из ловушки и последующего захвата, как это описано для сильновзаимодействующего газа. Во время процедуры выпуска-захвата и последующего перераспределения введённой потенциальной энергии газ находится в слабо неидеальном режиме, в магнитном поле 300 Гс вместо 528 Гс. Редкие столкновения обеспечивают затухание дышащей моды и наступление термодинамического равновесия. В то же время, среднее поле мало, что позволяет рассчитывать разлёт газа и прирост энергии, как для идеального. После наступления термодинамического равновесия магнитное поле переключается на значение 528 Гс, где длина рассеяния обращается в 0.

Энергия газа по-прежнему рассчитывается по формуле (3.32), а разлёт идеального газа является автотомельным. Коэффициенты $b_i(t)$, однако, рассчитываются не из уравнений гидродинамики, а из кинетического уравнения для газа невзаимодействующих частиц [134]. В приближении разлёта в свободное пространство из гармонического потенциала можно найти, что

$$b_i(t) = \sqrt{1 + \omega_i^2 t^2}. \quad (3.35)$$

В более точном анализе необходимо учесть, что разлёт происходит в слабом магнитном потенциале (3.7). Энергия основного состояния $E_{\text{осн.}} = \frac{3}{2}NE_{\text{Ф}}$. Это в 2 раза больше, чем величина в формуле (2.32), поскольку здесь атомы населяют 2 спиновых состояния, а не одно. Коэффициент η отличается от 1 несколько больше, чем в универсальном газе, поскольку почти идеальный газ не охлаждается до столь малых температур. Минимально достижимые температуры $T/E_{\text{Ф}} \approx 0,2$. Однако в случае идеального газа расчёт η является не приближённым, а точным. Поэтому, сколь не велик был бы коэффициент η , он не вносит ошибку в значение энергии. Величина η может быть найдена по формуле (2.36) или (2.37). Для нахождения η необходимо знать начальную температуру газа $T/E_{\text{Ф}}$, до ввода энергии. Эта температура измерима напрямую, как описано в подразделе 3.5.2. Описанный метод ввода энергии в сильновзаимодействующий и идеальный ферми-газ впервые предложен и реализован автором диссертации и коллегами [97].

Кроме описанного метода ввода энергии, в принципе возможны другие методы приготовления газа с энергией выше энергии основного состояния. Во-первых можно было бы просто останавливать выпаривание раньше, не достигая наименьших значений $T/E_{\text{Ф}}$. При использовании этого метода в облаках с большей величиной $T/E_{\text{Ф}}$ будет больше частиц. Кроме того, у метода менее точная воспроизводимость. Другая альтернатива — вводить энергию не путём выпуска-захвата, а при помощи параметрического нагрева. Этот метод более сложен с точки зрения расчётов.

3.7 Звук

3.7.1 Возбуждение звуковой волны

Впервые выполненное наблюдение звуковой волны в ферми-газе атомов и бозе-газе молекул описано в этом разделе. Средой для экспериментов выступают различные состояния системы на мосту БКШ–БЭК. Во всех случаях коллективное состояние системы близко к основному. Атомы в равной пропорции населяют состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Взаимодействия перестраиваются при помощи внешнего магнитного поля, которое принимает значения в окрестности резонанса Фешбаха при $B = 834$ Гс.

Звуковые волны возбуждаются лучом зелёного монохроматического света, который включается на короткое время. Луч показан на рисунке 3.12. Подобный метод возбуждения ранее использовался для наблюдения звука в бозе-эйнштейновском конденсате

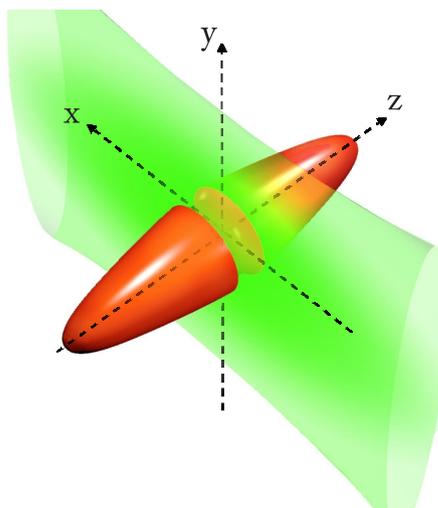


Рисунок 3.12 — Зелёный луч, импульс которого возбуждает звуковую волну в облаке атомов (показано красным).

атомов [135]. Звуковые волны распространяются из плоскости возбуждения к краям вдоль длинного направления z . Волны наблюдаются по изменению плотности.

Зелёный луч создаёт отталкивающий потенциал, поскольку его длина волны 532 нм меньше, чем длина волны 671 нм наиболее сильного электродипольного перехода в литии. Потенциал пропорционален распределению интенсивности. Луч распространяется в направлении x , проходя примерно через середину облака. Фокус луча совмещён с облаком. В поперечном сечении луч вытянут вдоль z . Полуширины луча в фокусе по уровню интенсивности $1/e$ в направлении y и z равны 150 и 15 мкм соответственно. Длина фокуса, как и ширина вдоль y , много больше толщины облака. Мощность луча составляет от нескольких десятков мВт до ~ 1 Вт. Высота создаваемого лучом потенциала $U_{\text{возб}}$ рассчитана из параметров луча и поляризуемости атомов и в различных экспериментах составляет от 0,5 до 14 мкК. Потенциал для молекулы равен потенциалу для 2 атомов, поскольку атомы в молекуле слабо связаны. Длительность импульса равна 280 мкс, что много меньше времени распространения звука в облаке, которое составляет ~ 10 мс.

После возбуждения, звуковые волны распространяются в облаке в течение времени t , после чего положение волн измеряется. Для этого облако выпускается из ловушки, разлетается в течение фиксированного времени, а затем фотографируется. Измерение, таким образом, разрушает квантовую систему. Для наблюдения положения звуковой волны в другой момент t эксперимент повторяется. Разлёт практически не изменяет положение волнового фронта вдоль z , а связанные с разлётом поправки легко учитываются (подраздел 3.7.2). В то же время, разлёт крайне полезен, поскольку облако в ловушке имеет высокую оптическую плотность, что затрудняет наблюдение малых возмущений концентрации. Кроме того разлёт улучшает разрешение при фотографировании относительно размеров облака. Исходный поперечный размер сравним с разрешением видеосистемы 5,5 мкм.

Облако после возбуждения и тотчас же последовавшего за ним разлёта показано на рисунке 3.13а. То есть в этом случае время распространения $t = 0$. Проинтегрировав это распределение плотности вдоль x , получаем одномерный профиль плотности $n_1(z)$, который удобен для измерений скорости звука. Этот профиль показан на рисунке 3.13б сплошной красной линией. Провал плотности вблизи $z = 0$ возник вследствие действия возбуждающего импульса. Профили, отвечающие временам распространения t от 1 до 3 мс, показаны на рисунках 3.13в–д. Видно, что два провала плотности разбегаются от центра вправо и влево соответственно. По бокам от провалов находятся возвышения

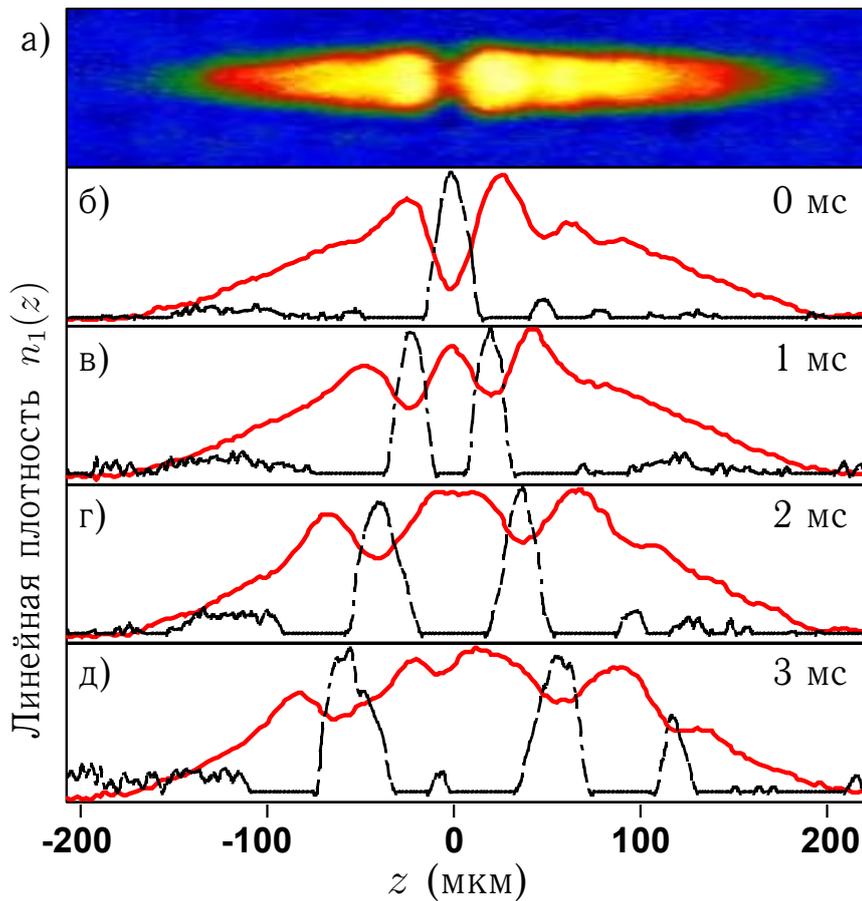


Рисунок 3.13 — а) Фотография облака после возбуждения и тотчас же последовавшего разлёта. б-д) Профили плотности вдоль z , отвечающие различным временам распространения звука t , указанным справа. Красная сплошная — полный профиль. Чёрная штрих-пунктирная — разность между невозмущённым и возмущённым профилем.

плотности. Штрих-пунктирными линиями на рисунках 3.13б-д показана разность между невозмущённым и возмущённым профилем, что позволяет более точно следить за распространением звука.

3.7.2 Измерение скорости звука

Наличие звуковой волны в приведённых данных очевидно. Количественная интерпретация данных существенно повышает их ценность. Целью анализа данных — нахождение скорости звука в центре облака c_0 и установление связи между c_0 и локальными термодинамическими величинами — химическим потенциалом $\mu_{\text{лок}}$ и плотностью. Решение этих двух задач разбивается на несколько этапов, рассмотрению которых посвящён этот подраздел. Измерение c_0 и установление связи между c_0 , n и $\mu_{\text{лок}}$ позволило проверить уравнение состояния системы на мосту БКШ-БЭК (раздел 8.2 на странице 138), а также измерить универсальную постоянную β и проверить универсальность основного состояния в унитарном режиме взаимодействия (подраздел 5.2.2 на странице 95).

Измерение скорости звука основано на слежении за минимумом плотности и движущимся впереди него максимумом. Отслеживался как фронт, распространяющийся вправо, так и влево. Минимумы и максимумы видны на рисунке 3.13. Пример измерения координат максимумов и минимумов приведён на рисунке 3.14. Слежение за обоими фронтами, соответственно распространяющимися вправо и влево, позволяет исключить системати-

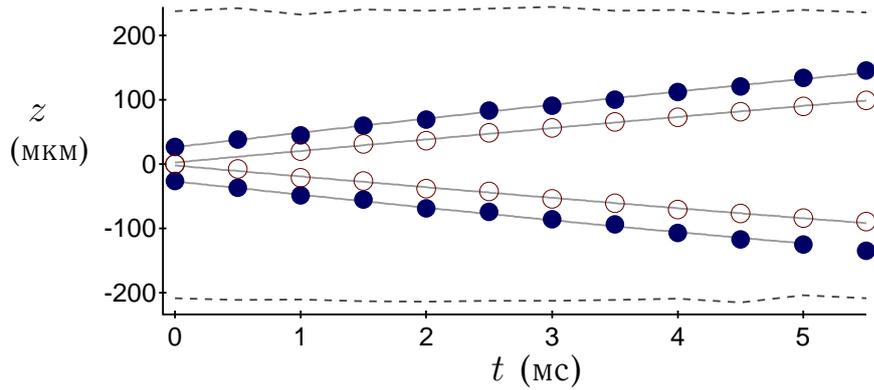


Рисунок 3.14 — Положение z максимума и минимума на фронте звуковой волны в зависимости от времени распространения t . Максимумы и минимумы показаны закрашенными и незакрашенными кружками соответственно. Сплошные линии — подгонка данных формулой (3.38). Пунктир — границы облака.

ческие ошибки связанные с чуть разными положениями облака и возбуждающего луча в разных повторениях эксперимента.

Положение фронтов измеряется не непосредственно в ловушке, а после выпуска и разлёта. Эти данные позволяют установить координаты фронта в ловушке. После выпуска распространение звука останавливается из-за быстрого падения плотности. Таким образом расстояние между левым и правым фронтом изменяется лишь из-за расширения облака. При разлёте изменяется в основном поперечный размер облака, а продольный остаётся почти неизменным. Во всех проведённых экспериментах продольный размер изменялся не более, чем на 4,7%, а в среднем по измерениям во всех условиях — на 1,2%. Разлёт облака происходит автомодельно ([47, 136], подраздел 5.3.2 на странице 99 и раздел 6.2 на странице 110), что позволяет вычислить расстояние между фронтами в момент начала разлёта в рамках уравнений гидродинамики.

Звуковая волна распространяется в неоднородном облаке, что, однако, не мешает восстановлению по этим данным скорости звука в центре облака, при $z = 0$. Сделаем очень общее допущение о зависимости $\mu_{\text{лок.}}(n)$:

$$\mu_{\text{лок.}} = C n^\gamma, \quad (3.36)$$

где C и γ — неизвестные постоянные. Используя это уравнение состояния и гидродинамические теории распространения звука [137, 138], можно установить конкретный вид зависимости $c(z)$:

$$c(z) \propto \sqrt{1 - \frac{z^2}{R_z^2}}, \quad (3.37)$$

где R_z — радиус Томаса–Ферми в направлении z . Эти теории предполагают разную зависимость c от уравнения состояния, которая задаётся уравнениями (3.41) и (3.42) соответственно. Тем не менее результат (3.37) не зависит от выбора модели, что делает его достаточно общим. Одна из этих теорий соответствуют распространению звука в однородной среде [137], а другая [138] — вдоль узкого цилиндрического канала. В зависимость (3.37) также не входит γ , что делает этот результат практически модельно независимым. Из формулы (3.37) следует, что малое возмущение распространяется вдоль z по закону

$$z(t) = R_z \sin(\pm \frac{c_0 t}{R_z} + \varphi), \quad (3.38)$$

где $\varphi = \arcsin z_{\text{возб.}}/R_z$, а $z_{\text{возб.}}$ — координата плоскости, из которой начинает распространяться возбуждение.

Таким образом, скорость в центре облака можно найти, подогнав положения волнового фронта $z(t)$ зависимостью (3.38). Пример подгонки показан на рисунке 3.14. Отдельно можно получить значение c_0 для минимума и для максимума плотности. Для подгонки использовано распространение звука в центральных 65% облака. При подгонке статистическая ошибка в значении c_0 в среднем равна 1,3% и не превышает 5,3%.

Традиционно скоростью звука называют скорость распространения малых возмущений. В описанном эксперименте возмущение сравнимо с невозмущённой плотностью, что можно видеть на рисунке 3.13. Для вычисления истинной скорости звука из данных необходимо принимать во внимание нелинейность распространения сильных возмущений. Например, для бозе-эйнштейновского конденсата вычислено [139], что максимум плотности распространяется быстрее, чем минимум. Качественно та же картина наблюдается в описываемом эксперименте. На рисунке 3.15 показана скорость минимумов и максимумов в зависимости от силы возбуждения $U_{\text{возб.}}/\mu$, где глобальный химический потенциал μ оценён из численных расчётов методом Монте-Карло [140, 141]. Скорость звука на графике нормирована на глобальную скорость Ферми $v_{\text{Ф}} \equiv \sqrt{2E_{\text{Ф}}/m}$. При уменьшении возбуждения скорости минимумов и максимумов сходятся к одному и тому же значению. А среднее двух скоростей не зависит от силы возбуждения и, таким образом, равно истинной скорости звука, которая и будет использована в дальнейшем.

В измерениях $U_{\text{возб.}}/\mu$ варьируется пределах от 1 до 30. Для бозе-эйнштейновского конденсата предсказано формирование ударных волн при сильном возбуждении [139]. В описываемом эксперименте ударные волны не наблюдались.

Измерения проводились в потенциале слегка отличном от гармонического. Ангармонизм является лишним малым параметром, усложняющим сравнение результатов с теорией. Для исключения этого параметра в измеренных скоростях $c_0^{\text{изм.}}$ сделана малая поправка на ангармонизм и получены скорости c_0 для гармонических ловушек с теми же частотами.

Эти поправки наиболее существенны для мелких ловушек. В таких ловушках продольное удержание осуществляется за счёт магнитного поля и с высокой точностью гармонично, а поперечное удержание происходит за счёт оптического потенциала с гауссовым профилем. Сделана поправка лишь на ангармонизм поперечного потенциала. Поправка рассчитана на основе уравнения (3.42) в первом порядке по μ/U_0 . Экспериментальное

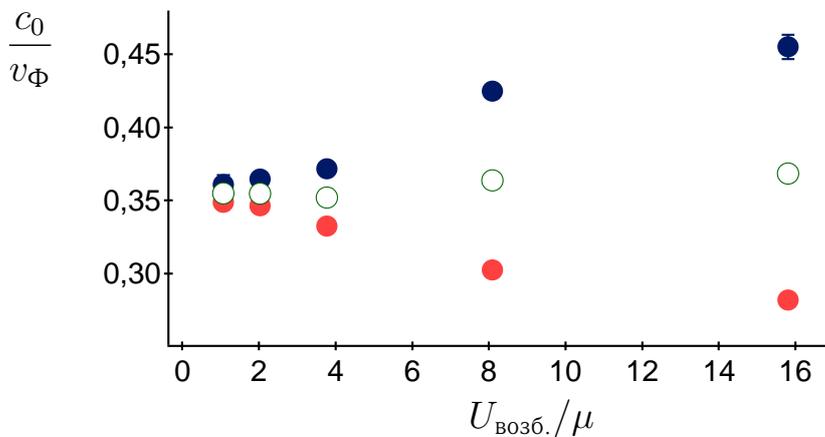


Рисунок 3.15 — Скорость структур волнового фронта (при $z = 0$) в зависимости от силы возбуждения. Синими сплошными кружками показана скорость переднего максимума, красными — минимума, а кольцами — среднее этих двух скоростей. Измерения сделаны на резонансе Фешбаха ($a = \infty$).

обоснование применимости этого уравнения изложено ниже в этом подразделе. Подробности расчёта поправок приведены в диссертации [142]. В расчёте поправок применены модельные уравнения состояния, подобные уравнению (3.36). На фермиевской стороне резонанса Фешбаха, при $1/k_{\Phi}a \leq 0$, использовано уравнение для ферми-газа с показателем степени $\gamma = 2/3$ и получена формула поправки

$$\frac{c_0}{c_0^{\text{изм.}}} = 1 + 0,10 \frac{\mu}{U_0}. \quad (3.39)$$

При $1/k_{\Phi}a > 1$ предполагается режим молекулярного бозе-газа, что даёт уравнение состояния с показателем $\gamma = 1$ и поправку

$$\frac{c_0}{c_0^{\text{изм.}}} = 1 + 0,14 \frac{\mu}{U_0}. \quad (3.40)$$

При $0 < 1/k_{\Phi}a < 1$ поправки (3.39) и (3.40) комбинируются линейно по величине $1/k_{\Phi}a$. Величина μ/U_0 для различных экспериментов составила от 0,025 до 0,43. Значение μ взято из численных расчётов методом Монте-Карло [140, 141]. В среднем, связанная с ангармонизмом поправка составила 0,5% и не превышала 2,5%.

Предположения об уравнении состояния сделаны лишь для вычисления малых поправок, что позволяет использовать результаты измерения скорости звука для проверки самого уравнения состояния. Уточнение μ в уравнениях (3.39) и (3.40) было бы поправкой к поправкам, превышающей точность измерения.

Уравнение состояния $\mu_{\text{лок.}}(n)$ может быть проверено по скорости звука, если известна связь между c и $\mu_{\text{лок.}}$. Существуют две модели распространения звука, дающие существенно разную связь между c и $\mu_{\text{лок.}}$. Модель изотропного распространения звука предполагает, что

$$c_{\text{лок.}}(n) = \sqrt{\frac{n}{m} \frac{d\mu_{\text{лок.}}}{dn}}. \quad (3.41)$$

Модель распространения звука вдоль цилиндра, моделирующего веретенообразную ловушку, даёт [138]

$$c(z) = \sqrt{\frac{\int n(x, y, z) dx dy}{m \int \left(\frac{d\mu_{\text{лок.}}}{dn}\right)^{-1} dx dy}}. \quad (3.42)$$

Слежение за формой волнового фронта позволяет отбросить первую модель и подтвердить вторую. В изотропной модели (3.41) скорость зависит лишь от локальной плотности. Поэтому изначально плоский волновой фронт должен изгибаться — звук вблизи продольной оси z распространяется быстрее, чем на краях, так как плотность вблизи оси выше. В конкурирующей модели (3.42) скорость звука не зависит от x, y , то есть $c(x, y, z) = c(z)$.

Экспериментальные наблюдения показывают, что скорость звука действительно не зависит x . Это заставляет отказаться от изотропной модели (3.41) и свидетельствует в пользу модели распространения вдоль тонкого цилиндра. В подтверждение на рисунке 3.16 показана зависимость скорости звука от x в плоскости $z = 0$. Для получения этого графика снимки газа разбиты по x на 21 сегмент, вытянутый вдоль z . В каждом сегменте с координатой x измерена скорость звука в сечении $z = 0$. Видно, что волновой фронт плоский. На том же рисунке данные сравниваются с зависимостью, предсказанной локальной моделью (3.41). Для вычислений в рамках локальной модели использовано уравнение состояния (2.101) на резонансе Фешбаха с константой $\beta = -0,565$. Измерения также выполнены на резонансе Фешбаха. Возможные поправки к значению β не могут повлиять на кардинальное отличие модели (3.41) от результатов измерения.

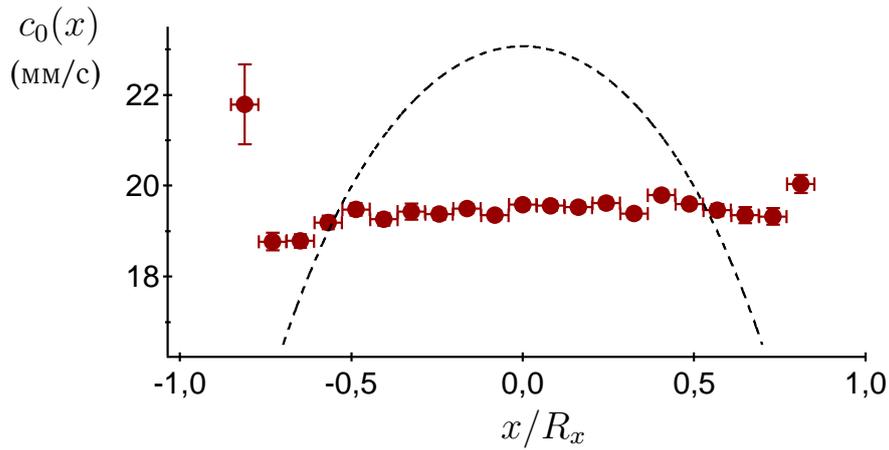


Рисунок 3.16 — Скорость звука в зависимости от x (кружки), показывающая, что волновой фронт плоский. Для сравнения штриховой линией нанесены значения, полученные в рамках изотропной модели (3.41) усреднением вдоль y .

Таким образом, разработан метод измерения скорости звука в центре ловушки c_0 . Экспериментально обоснована связь между скоростью звука и химическим потенциалом (3.42), что позволило использовать звук для проверки уравнения состояния на мосту БКШ–БЭК, описанному в разделе 8.2 на странице 138, а также для проверки универсальности и измерения постоянной β , как описано в подразделе 5.2.2 на странице 95. Результаты, приведённые в этом разделе, опубликованы в работе [143].

Глава 4

Двумерный ферми-газ атомов

4.1 Мотивация создания системы

Двумерные системы интересны благодаря влиянию размерности на физику фазовых переходов, критических точек [144, 145], на свойства коллективных возбуждений и межчастичных взаимодействий. Например, бозе-эйнштейновская конденсация в однородной двумерной системе невозможна при конечных температурах из-за большого числа возбуждений с малыми импульсами. Эти возбуждения не допускают когерентности на далёких расстояниях. Несмотря на невозможность конденсации, при низких температурах может существовать сверхтекучая фаза. Разрушение этой фазы, происходящее с ростом температуры, сопровождается рождением пар вихрь-антивихрь — в этом заключается фазовый переход Березинского¹⁾–Костерлица²⁾–Таулеса³⁾ [146, 147, 148, 149, 150].

Известные до недавнего времени 2-мерные ферми-системы — это плёнки гелия-3 [151] и электронные газы в сверхпроводящей [152, 43] и несверхпроводящей [153, 154] фазе. Создание 2-мерного ферми-газа атомов расширяет возможности исследования благодаря гибкости атомной системы и возможности прямого наблюдения. Например, атомный газ — единственная 2-мерная ферми-система, в которой распределение плотности было напрямую измерено. Впервые подобное измерение выполнено автором диссертации и коллегами [51], результаты приведены в разделе 4.3.

Несмотря на интенсивное изучение твердотельных и гелиевых систем, важные вопросы остаются открытыми. Например, к настоящему моменту не выполнено прямое наблюдение перехода Березинского–Костерлица–Таулеса, а косвенные наблюдения оспариваются [155]. Возможно, в атомном ферми-газе удастся наблюдать переход напрямую, по образованию вихрей. Ряд задач, которые могут оказаться доступны в атомном газе описаны в подразделе 1.4.1 на странице 10. Возможно, в экспериментах с атомным газом будет обнаружена неоднородная сверхтекучесть Фульде–Ферела–Ларкина–Овчинникова, удастся пронаблюдать давно искомый фермион Майораны и новые типы фазовых переходов. Ультрахолодный атомный газ, возможно, станет беспримесной и легко перестраиваемой моделью высокотемпературного сверхпроводника, что позволит проверить модели высокотемпературной сверхпроводимости.

В этой главе сообщается о впервые выполненном наблюдении 2-мерного ферми-газа атомов. Описано управление размерностью и измерение температуры в 2-мерном ферми-газе.

¹⁾Вадим Львович Березинский, 1935–1980

²⁾John Michael Kosterlitz

³⁾David James Thouless

4.2 Управление кинематической размерностью

Будем считать, что кинематическая степень свободы доступна для материальной точки, если она может занимать много энергетических состояний движения в соответствующем направлении. Таким образом, управление доступом к энергетическим состояниям позволяет управлять кинематической размерностью. Здесь эта идея используется для создания первого ферми-газа атомов с размерностью 2.

Рассмотрим ферми-газ, помещённый в сильно анизотропный гармонический потенциал дископодобной формы

$$U(\vec{x}) = \frac{m\omega_z^2 z^2}{2} + \frac{m\omega_\perp^2(x^2 + y^2)}{2}, \quad \omega_z \gg \omega_\perp. \quad (4.1)$$

Если энергия подавляющего большинства частиц меньше энергии возбуждённого состояния для движения в направлении z ($\frac{3}{2}\hbar\omega_z$), то система кинематически 2-мерна. На рисунке 4.1 приведён пример 2-мерного идеального ферми-газа при $T = 0$. В этом случае

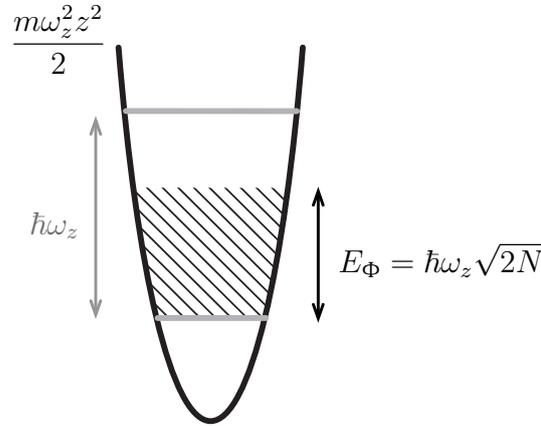


Рисунок 4.1 — 2-мерный идеальный ферми-газа при $T = 0$. Штриховкой показаны состояния, заполненные газом.

необходимое и достаточное условие двумерности — это ограничение на энергию Ферми:

$$E_\Phi < \hbar\omega_z. \quad (4.2)$$

Энергия Ферми здесь отсчитывается от основного состояния осциллятора и рассчитана в приближении бесконечно часто лежащих состояний движения вдоль x и y :

$$E_\Phi = \hbar\omega_\perp\sqrt{2N}. \quad (4.3)$$

Вывод этой формулы приведён в приложении А. Из условия (4.2) видно, что число частиц в 2-мерном газе ограничено сверху. При $N \geq \omega_z^2/2\omega_\perp^2$ идеальный ферми-газ не может быть 2-мерным. В случае заполнения большого числа уровней по z , система кинематически 3-мерна. Если заполнено небольшое число уровней, то систему можно рассматривать как переходную между размерностью 2 и 3. При ненулевой температуре и межчастичном взаимодействии условие (4.2) пониженной размерности должно быть дополнено: ни температура, ни взаимодействия не населяют возбуждённые состояния.

Цепочка изолированных потенциалов вида (4.1) может быть создана путём удержания газа в оптической решётке, как это описано в подразделе 2.4.3 на странице 29. При таком методе создания гармонического потенциала появляется ещё одно необходимое условие двумерности — туннелирование между ячейками потенциала за время эксперимента должно быть пренебрежимо мало.

4.3 Наблюдение и термометрия почти идеального двумерного ферми-газа

Двумерный ферми-газ готовится методами лазерного пленения и охлаждения, описанными в разделе 3.1 на странице 58. Серия облаков создаётся в пучностях стоячей волны, что схематично показано на рисунке 4.2. Проверяется выполнение условий

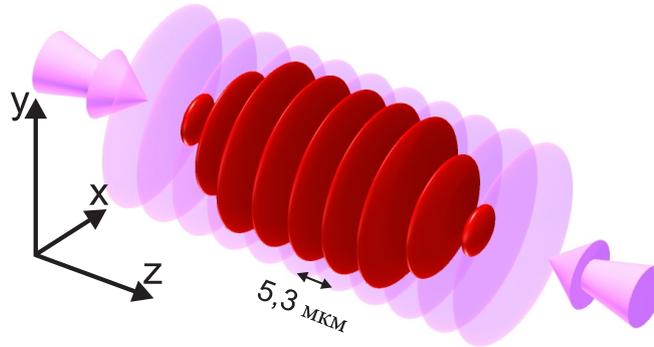


Рисунок 4.2 — Пленение атомов пучностями стоячей волны. Облака атомов показаны тёмнокрасным, а распределение интенсивности света — светлосиреневым.

двумерности, перечисленных в предыдущем разделе 4.2. Фотография серии облаков 2-мерного ферми-газа показана на рисунке 4.3. Снимок сделан вдоль плоскости облаков,

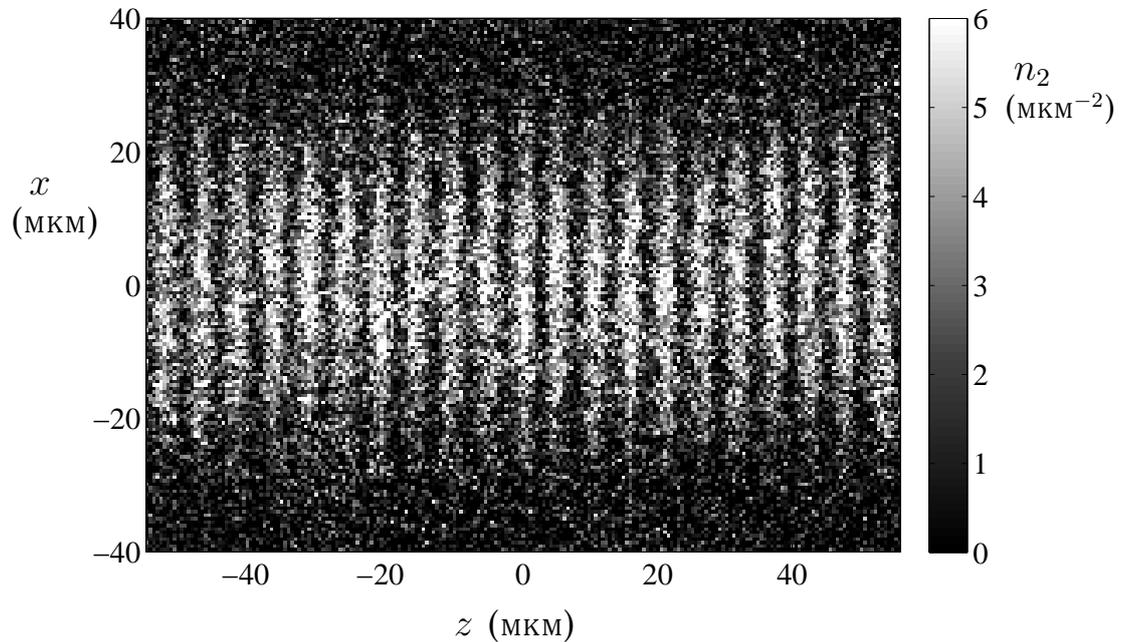


Рисунок 4.3 — Серия облаков 2-мерного ферми-газа. Показано распределение концентрации $n_2(x, z)$. Число атомов в одном спиновом состоянии на квадратный микрон кодировано в тонах серого. В отличие от рисунка 3.6 здесь в каждой ячейке существенно меньше атомов (660 вместо 3700 в каждом спиновом состоянии), что удовлетворяет условию 2-мерности.

в направлении y , отмеченном на рисунке 4.2. На снимке показано проинтегрированное вдоль луча зрения распределение плотности $n_2(x, z) = \int n(\vec{x}) dy$. Доказательство того,

что каждое облако представляет собой изолированную двумерную систему приведено в разделе 4.4. В этом разделе обратимся к измерению температуры.

Термометрия слабо неидеального ферми-газа может быть построена подобно 3-мерному случаю, описанному в подразделе 3.5.2. Измерение основано на подгонке линейного распределения плотности теоретической кривой. Проведём измерения над данными, приведёнными на фотографии 4.3. Газ приготовлен в слабо неидеальном режиме, при $k_{\Phi}a = -0,43$, где $k_{\Phi} \equiv \sqrt{2mE_{\Phi}}/\hbar$ — глобальный импульс Ферми. То есть $n_{\max}^{1/3}a \approx k_{\Phi}a/(6\pi^2)^{1/3} = -0,11$. В каждой ячейке газ находится в потенциале, близком к гармоническому потенциалу (4.1). Линейное распределение концентрации получим путём интегрирования по z в одной ячейке и усреднения по всем показанным ячейкам. Распределение приведено на рисунке 4.4.

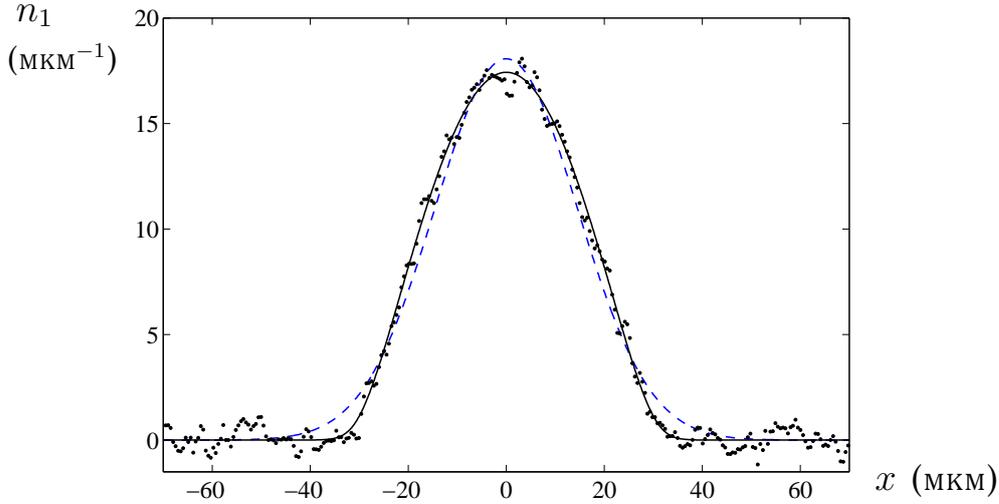


Рисунок 4.4 — Линейное распределение плотности в одной ячейке, полученное интегрированием вдоль y и z . Точками показаны данные, усреднённые по 21 центральной ячейке. Чёрная сплошная — подгонка формулой (4.4), пунктирная синяя — гауссовым распределением.

Теоретически профиль концентрации 2-мерного идеального ферми-газа выведен в приложении А. Линейное распределение плотности описывается формулой

$$n_1(x) = -\sqrt{\frac{m\omega_{\perp}}{2\pi\hbar}} \left(\frac{T}{\hbar\omega_{\perp}}\right)^{3/2} \text{Li}_{3/2}\left(-e^{\frac{\mu}{T} - \frac{m\omega_{\perp}^2 x^2}{2T}}\right), \quad (4.4)$$

где $\text{Li}_{3/2}$ — полилогарифмическая функция порядка $3/2$, а μ — глобальный химический потенциал, который находится самосогласованно из условия $N = \int n_1(x) dx$. Частота ω_{\perp} известна и равна $2\pi \cdot (102 \pm 4 \text{ Гц})$, поэтому для идеального газа единственный неизвестный параметр — это температура, которая и могла бы быть найдена путём подгонки данных формулой (4.4). Однако в данном случае речь идёт о ферми-газе с небольшим притягивающим средним полем. Размер неидеального газа чуть меньше, чем размер идеального. Для того, чтобы учесть неидеальность, сделаем ω_{\perp} свободным параметром наряду с температурой. Результат такой подгонки показан на рисунке 4.4 чёрной сплошной линией. Подгонка даёт температуру в единицах энергии Ферми: $T = (0,10 \pm 0,03)E_{\Phi}$. Подставив экспериментальные данные, $\omega_{\perp}/2\pi = 102 \pm 4 \text{ Гц}$ и $N = 660 \pm 60$, в формулу $E_{\Phi} = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{2N}$, найдём, что $E_{\Phi} = 180 \pm 10 \text{ нК}$. Значение E_{Φ} позволяет установить температуру в абсолютных единицах: $T = 18 \pm 6 \text{ нК}$.

Поскольку газ сильно вырожден ($T/E_F \ll 1$), одновременное варьирование T и ω_\perp при подгонке не вносит ошибку в определение этих параметров. При $T/E_F < 0,4$ эти два параметра почти независимы друг от друга. При $T/E_F \gg 0,4$ одновременно варьирование T и ω_\perp приводит к бесконечной ошибке, поскольку распределение плотности атомов по отношению T/ω_\perp^2 , что можно видеть, например, из формулы (3.11).

Отличие профиля плотности вырожденного газа от классического гауссова распределения показано на рисунке 4.4. Голубая пунктирная кривая — результат подгонки данных гауссовой функцией с варьируемой дисперсией и амплитудой. Можно видеть, что классическое распределение приближает данные значительно хуже, чем распределение Томаса–Ферми. Гауссова функция отстоит от данных как в центре, так и на краях. Система находится в состоянии квантового вырождения.

4.4 Доказательство двумерности

Докажем, что каждое облако в системе, представленной на фотографии 4.3, является двумерным ферми-газом. Температура системы найдена в предыдущем разделе 4.3. Достаточное условие двумерности складывается из выполнения 2 условий:

- абсолютное большинство атомов населяет основной уровень потенциала вдоль z ;
- туннелирование между ячейками пренебрежимо мало.

Начнём с вопроса о туннелировании. Газ находится в глубоком периодическом потенциале (подраздел 2.4.3 на странице 29):

$$U(\vec{x}) = sE_{\text{отдачи}} \left(1 - \exp \left(-\frac{m\omega_\perp^2 (x^2 + y^2)}{2sE_{\text{отдачи}}} \right) \cos^2 k_d z \right), \quad (4.5)$$

безразмерная глубина которого выражается через аксиальную частоту $s = (\hbar\omega_z/2E_{\text{отдачи}})^2$. Зная аксиальную частоту $\omega_z/2\pi = 5570 \pm 100$ Гц, найдём, что $s = 86,5$. Столь большая глубина даёт малую ширину основной зоны Блоха, равную $1,1 \cdot 10^{-7} \hbar\omega_z$. Время туннелирования равно обратной ширине зоны Блоха и составляет 260 секунд. Таким образом, на временах $\ll 260$ с туннелированием можно пренебречь. Этого времени достаточно для большинства возможных экспериментов. В экспериментах с вырожденными газами атомов время наблюдения как правило составляет от миллисекунд до секунд. Малое туннелирование позволяет рассматривать одночастичные состояния движения вдоль z как дискретные уровни, а не зоны Блоха.

Обратимся к вопросу о населённости 1-го возбуждённого состояния вдоль направления z . В принципе, этот уровень может быть населён из-за

- статистики Ферми,
- теплового возбуждения атомов,
- межатомного взаимодействия.

Рассмотрим роль всех трёх факторов, начав со статистики Ферми. Для идеального ферми-газа, на который похож слабозаимодействующий газ, необходимое условие двумерности

$$E_F < \hbar\omega_z, \quad (4.6)$$

уже обсуждавшееся в разделе 4.2. Подставив экспериментальные данные, $\omega_\perp/2\pi = 102 \pm 4$ Гц и $N = 660 \pm 60$ в формулу $E_F = \hbar\omega_\perp \sqrt{2N}$, найдём, что $E_F = 180 \pm 10$ нК = $(0,67 \pm$

$0,04)\hbar\omega_z$. Таким образом, условие (4.6) выполнено и, следовательно, принцип запрета Паули не препятствует двумерности.

Перейдём к тепловым возбуждениям. Измерение температуры описано в разделе 4.3. Температура составила $(0,10 \pm 0,03)E_\Phi = 18$ нК. При таком отношении T/E_Φ возбуждены лишь 0,01% атомов, что тоже не нарушает двумерность газа. Измерение температуры в разделе 4.3 описано в предположении двумерности. Этого можно не предполагать заранее и выполнять подгонку моделью (A.22), допускающей населённость возбуждённых уровней вдоль z . Использование этой модели даёт то же значение температуры.

Населённость возбуждённых аксиальных состояний, возникающую под действием межатомных взаимодействий, оценим как возмущение невзаимодействующей ферми-системы. Описание в виде возмущения оправдано, поскольку 3-мерный параметр взаимодействия $k_\Phi a = -0,43$ мал по абсолютной величине и, с точки зрения 2-мерной теории взаимодействия, параметры системы далеки от геометрического резонанса среднего поля [156]. Для построения оценки, опишем взаимодействие модельным гамильтонианом, который учитывает движение атомов лишь в аксиальном направлении (z):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_z^2}{2\bar{m}} + \frac{\bar{m}\omega_z^2 \hat{z}^2}{2} + \frac{2\pi\hbar^2 a \langle n_2(x, y) \rangle}{\bar{m}} \delta(\hat{z}), \quad (4.7)$$

где $\bar{m} = m/2$ — приведённая масса; \hat{p}_z и \hat{z} — операторы относительного импульса и координаты двух взаимодействующих атомов, введённые формулами (2.41); δ — дельта-функция Дирака; а $\langle n_2(x, y) \rangle = mE_\Phi/3\pi\hbar^2$ — усреднённая по плоскости xy 2-мерная плотность газа в облаке. Последнее слагаемое гамильтониана учитывает межатомное взаимодействие, которое в условиях эксперимента приводит к удалению 0,2% атомов из основного состояния.

Уход атомов из основного состояния под действием всех факторов можно оценить в 0,2%. То есть из 660 атомов в облаке лишь один не находится в основном состоянии аксиального движения. Эта оценка, вместе с пренебрежимо малой скоростью туннелирования доказывает, что в эксперименте, действительно, наблюдается 2-мерный ферми-газ.

4.5 Предыдущие попытки приготовления двумерного ферми-газа атомов

Приготовление и наблюдение 2-мерного ферми-газа атомов стало результатом прогресса в экспериментальных методах. Дискотипный гармонический потенциал создан в пучности стоячей электромагнитной волны. Для того, чтобы система в каждой ячейке была независима от соседней, туннелирование между ячейками подавлено. Для этого используется потенциал большой безразмерной глубины $s = 86,5$. Потенциал консервативен на временах эксперимента. Неконсервативность привела бы к нагреву газа и заселению возбуждённых зон Блоха, а также — к невозможности приготовить систему в термодинамическом равновесии. Отсутствие населённости возбуждённых зона Блоха установлено в результате всестороннего анализа данных. Для прямого наблюдения используется оптическая система высокого разрешения.

Приготовление 2-мерного ферми-газа сложнее, чем приготовление 2-мерного бозе-газа, поскольку ферми-система с тем же количеством частиц обладает более высоким химическим потенциалом. Поэтому для ферми-системы сложнее выполнить условие $\mu < \hbar\omega_z$.

О приготовлении ферми-газа атомов в поле стоячей волны было сообщено в работе [48]. В дальнейшем подобный потенциал использовался в работах, посвящённых формированию молекул [157], интерферометрии [158] и столкновениям [159, 89]. Ни в одной из этих работ не было установлено, что газ, пленённый в пучности, является

2-мерным ферми-газом. Рассмотрим эти 5 работ подробнее, поскольку в части этих работ утверждается, что эти работы сообщают о приготовлении 2-мерного ферми-газа атомов.

В работе [48] сообщается о «приготовлении газа сниженной размерности» и наблюдении «признаков квазидвумерности». Тем не менее, из приведённых в статье данных видно, что рассматриваемая система не является двумерной. Газ атомов калия-40 приготовлен в комбинации потенциалов магнитной ловушки и стоячей волны с длиной волны 754 нм. Пучности стоячей волны являются максимумами оптического дипольного потенциала. Безразмерная глубина оптической решётки $s = 8$, а в абсолютных единицах — $sE_{\text{отдачи}} = 3,32$ мкК. Ширина основной зоны Блоха составляет $0,12E_{\text{отдачи}} = 51$ нК, откуда можно найти время туннелирования 150 мкс. Сравним это время с другими характерными временами системы и покажем, что столь быстрое туннелирование не позволяет считать газ двумерным. Время наблюдения газа в статье однозначно не называется. Сообщается, что газ может наблюдаться $\gtrsim 0,5$ с, также даётся характерное время включения потенциала 0,5 с. Можно предположить, что характерное время наблюдения сотни мс, что много больше времени туннелирования. Время установления термодинамического равновесия можно оценить снизу, как $1/\omega_{\perp} \approx 500$ мкс, что также заведомо больше времени туннелирования. Таким образом, описанная в работе [48] система не может рассматриваться как двумерная из-за чрезмерно быстрого туннелирования.

Авторы работы [159] утверждали, что приготовили 2-мерный газ. Тем не менее, из описания эксперимента [159] очевидно, что газ таковым не является. Газ слабозаимодействующих атомов калия-40 перед перегрузкой в оптическую решётку приготовлен в 3-мерной ловушке при неизвестной температуре. Из приведённых данных можно найти энергию Ферми этого газа $E_{\text{Ф}} = 1,26 E_{\text{отдачи}}$, где $E_{\text{отдачи}}$ — энергия отдачи фотона решётки. При адиабатическом включении оптической решётки, которое как раз и имеет место, атомы с энергией больше $E_{\text{отдачи}}$ неизбежно попадают в первую возбуждённую зону Блоха. Таким образом, даже в наиболее благоприятных условиях, при $T = 0$, происходит заполнение возбуждённой зоны. Наименьшая температура, достигнутая к тому моменту на указанной экспериментальной установке и приведённая в другой работе составляет $0,2 E_{\text{Ф}}$ [160]. Температура достигнута путём выпаривания газа, содержащего 2 спиновых состояния. В эксперименте [159] температура может быть существенно выше, так как он проведён с газом в одном спиновом состоянии, а для удаления второй спиновой компоненты использовались, в том числе, неупругие столкновения. В дополнение к присутствию атомов в возбуждённой зоне Блоха, в работе [159] время туннелирования не мало в сравнении с временем наблюдения. Для атомов в основной зоне Блоха время туннелирования равно 5,2 мс, что меньше времени наблюдения 6,4 мс. А для атомов, населяющих первую возбуждённую зону, туннелирование происходит в 30 раз быстрее, за 180 мкс.

В работе [89] сильно взаимодействующий ферми-газ приготовлен в пучностях стоячей волны. В случаях, когда энергия газа минимальна, авторы называют газ «кразидвумерный» и «двумерным». Однако кинематическая размерность газа неясна и представляет собой интересный теоретический вопрос. С одной стороны энергия Ферми лежит выше первого возбуждённого состояния движения вдоль z . С другой стороны, химический потенциал может быть меньше $\hbar\omega_z$ из-за сильных взаимодействий. Населённость возбуждённых состояний из-за ненулевой температуры не измерена, но может быть найдена из приведённых данных путём построения подходящей теоретической модели. О построении такой модели к настоящему моменту, однако, не сообщалось. Если тепловая населённость возбуждённых состояний мала, то газ может находиться в весьма интересном квазидвумерном режиме, при котором возбуждённые состояния населены лишь из-за межчастичных взаимодействий [161].

Относительно работ [158, 157] сделано утверждение в статье [159] о том, что в них сообщено о приготовлении 2-мерного ферми-газа, хотя в оригинальных работах [158, 157]

подобное утверждение справедливо отсутствует. В работе [158] идеальный газ ферми-атомов калия-40 помещён в неглубокий периодический потенциал. Газ нельзя назвать двумерным, поскольку не выполнено условие на отсутствие туннелирования. Для атомов в нижней зоне Блоха время туннелирования для наиболее глубокой решётки равно 68 пкс, что \ll времени эксперимента, которое составляет как минимум 2 мс. Более того, суть эксперимента состоит в туннелировании атомов между ячейками решётки под действием дополнительного линейного потенциала.

В работе [157] на одном из этапов эксперимента двумерный газ атомов приготовлен в пучностях стоячей волны. Авторы справедливо воздерживаются от использования термина «ферми-газ» по отношению к этой системе. Газ далёк от состояния квантового вырождения, поскольку его температура велика: $T = 3,1 E_F$. При такой температуре свойства газа ферми-частиц неотличимы от газа классических частиц или газа бозонов.

Таким образом, в диссертации сообщается о впервые выполненном приготовлении двумерного ферми-газа атомов.

Глава 5

Универсальный ферми-газ

5.1 Мотивация доказательства и исследования универсальности в атомном газе

Введение в свойства универсальных систем сделано в подразделе 2.7.2 на странице 48. Под универсальностью здесь понимается зависимость всех локальных термодинамических свойств от единственной безразмерной переменной — $T/\varepsilon_{\text{Ф}}$. Все размерные величины могут быть выражены через $\varepsilon_{\text{Ф}}$ и безразмерные универсальные константы. К таким величинам относится, в том числе, температура перехода в сверхтекучее состояние $T_{\text{кр}}$ и энергия основного состояния. Найдя универсальные константы для одной физической системы, с их помощью можно описать другие универсальные системы.

В работе [106] предложена гипотеза о том, что система в унитарном режиме парных s -волновых столкновений универсальна. При этом предполагается, что характерный размер потенциала взаимодействия r_0 мал по сравнению с межчастичным расстоянием $n^{-1/3}$. Предполагаемое достаточное условие универсальности может быть сформулировано в виде

$$|a| \gg n^{-1/3} \gg r_0. \quad (5.1)$$

Атомный газ на широком резонансе Фешбаха, таким образом, может оказаться универсальной системой. Кроме того, в универсальном режиме может находиться часть материи нейтронных звёзд и сильно коррелированный электронный газ в некоторых сверхпроводниках.

Универсальность сильно взаимодействующих систем не доказана на основе микроскопических уравнений. Расчёт универсальных констант, таких как β и $T_{\text{кр}}/\varepsilon_{\text{Ф}}$, представляет собой сложную задачу из-за отсутствия малого параметра. Противоречивость различных расчётных методов можно видеть из теоретических результатов, сведённых в таблицу 2.2 на странице 48. Таким образом, важна и интересна, как экспериментальная проверка универсальности, так и поиск универсальных констант.

В разделе 5.2 сообщается о проверке универсальности при $T = 0$ новым методом — по распространению звука. Этот же метод впервые применён для измерения универсальной константы β , определенной согласно уравнению (2.103) как отношение энергии среднего поля к локальной энергии Ферми. Также величина β найдена альтернативным методом, из размеров облака.

В разделе 5.3 этой главы сообщается о впервые произведённой проверке универсальности при конечных температурах. Проверка выполнена двумя независимыми методами — по размеру облака в ловушке и по частоте дышащей моды. Проверена вириальная теорема для универсальной системы, лежащая в основе метода энергетрии, описанного в подразделе 3.5.4 на странице 75.

За пределами этой главы приведены результаты впервые выполненных измерений температуры сверхтекучего перехода $T_{кр.}$. Измерения проведены двумя независимыми методами — по затуханию дышащей моды и по зависимости энергии от температуры — и описаны соответственно в главе 6, посвящённой сверхтекучей гидродинамике, и главе 7, посвящённой термодинамике ферми-газов.

5.2 Проверка универсальности в основном состоянии. Измерение универсального параметра β

5.2.1 Измерение β по размеру облака

Предположив, что система универсальна, получим простой вид уравнения состояния при $T = 0$:

$$\mu_{лок.}(n) = (1 + \beta) \varepsilon_{\Phi}(n). \quad (5.2)$$

В подразделе 2.7.2 на странице 48 показано, что это уравнение позволяет рассчитать профиль плотности и размер газа в параболическом потенциале. Профиль плотности соответствует ноль-температурному профилю Томаса–Ферми (2.106), а радиус Томаса–Ферми для i -го направления задаётся выражением

$$R_i = \sqrt{\frac{2E_{\Phi}\sqrt{1+\beta}}{m\omega_i^2}}. \quad (5.3)$$

Измерение размеров облака, таким образом, позволяет найти универсальную постоянную β .

Для измерения β приготовлен газ ферми-атомов лития-6 в двух равнонаселённых спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$, по $N = 110\,000 \pm 15\,000$ атомов в каждом. Внешний потенциал представляет собой веретенообразную ловушку глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x\omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10$ Гц), $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 71 \pm 3$ Гц. Газ охлаждён до наименьшей достижимой относительной температуры T/E_{Φ} . По эмпирической шкале, описанной в подразделе 3.5.3 на странице 72, значение относительной температуры $(T/E_{\Phi})_{эмп.} = 0,04$. Для оценки можно принять, что $T/E_{\Phi} \approx (T/E_{\Phi})_{эмп.}$. Сильные взаимодействия присутствуют благодаря внешнему магнитному полю $B = 840$ Гс, величина которого близка к s -волновому резонансу Фешбаха при 834 Гс, что даёт параметр взаимодействия $k_{\Phi}a = -30$. Большая величина $k_{\Phi}|a|$ аналогична выполнению той части условия универсальности (5.1), которая требует $|a| \gg n^{-1/3}$. Вторая часть условия универсальности, $n^{-1/3} \gg r_0$, в ультрахолодных атомных газах выполнена с большим запасом: r_0 на 3–4 порядка меньше межчастичного расстояния. Внешний потенциал для газа близок к параболическому, поскольку $E_{\Phi} = 2,5$ мкК $\ll U_0$.

В выражении (5.3), таким образом, известны все величины, кроме радиуса Томаса–Ферми R_i и универсальной величины β . Следовательно, измерение любого из радиусов R_i позволяет найти β . Радиус R_x или R_z может быть измерен по изображению облака газа в ловушке. Для этого сфотографированная двумерная плотность $n_2(x, z)$ интегрируется вдоль одного из направлений, что даёт линейное распределение плотности вдоль интересующей координаты, например, $n_1(x)$.

Газ находится в состоянии близком к основному. Поэтому R_x можно было бы найти, подогнав $n_1(x)$ ноль-температурным распределением Томаса–Ферми. Однако этот способ переоценил бы R_x , поскольку облако чуть уширено из-за отличной от нуля температуры. Ошибку, связанную с конечной температурой, можно существенно уменьшить, если подогнать $n_1(x)$ профилем плотности для произвольного T/E_{Φ} , как это делается в методе

эмпирической термометрии, описанном в подразделе 3.5.3 на странице 72. Подгонка даст радиус Томаса–Ферми.

Из величины R_x значение β можно найти более точно, чем из R_z , поскольку частота ω_x измерена с меньшей погрешностью, чем ω_z . Измерение проводилось с видеосистемой, имеющей разрешение 5,5 мкм, сравнимое с размером ловушки вдоль x . Из-за конечного разрешения измерение профиля плотности непосредственно в ловушке было бы неточным. Для того, чтобы исключить влияние конечного разрешения, газ фотографируется после быстрого выключения ловушки и последующего разлёта в течение 1 мс, за которую размер газа увеличивается в $b_x = 13,3$ раз. Профиль плотности при расширении сохраняется. Подгоняя профиль плотности вдоль x конечнотемпературным распределением Томаса–Ферми (3.13), (3.14) и используя коэффициент масштабирования $b_x = 13,3$, можно найти радиус (5.3) и величину β :

$$\beta = -0,49 \pm 0,04. \quad (5.4)$$

Сохранение профиля плотности при разлёте, то есть автомодельность расширения, обсуждается в подразделе 5.3.2. При $T = 0$ автомодельность разлёта может быть доказана из уравнений гидродинамики и уравнения состояния (5.2). Универсальность при $T \approx 0$, а значит и справедливость уравнения (5.2) проверена для широкого диапазона концентраций газа в следующем подразделе 5.2.2. Гидродинамический разлёт наблюдался в первом эксперименте над сильно взаимодействующим ферми-газом [47].

Впервые подобное измерение β реализовано в работе [22], выполненной без участия автора диссертации. Здесь сообщается об уточнённой версии измерения, опубликованной автором и коллегами в работе [97]. В оригинальном эксперименте [22] модуль β был недооценён из-за сдвига магнитного поля с резонанса в фермиевскую сторону, на значение 910 Гс, что дало параметр взаимодействия $k_{\text{фа}} = -5,4$. Значение резонансного поля $B = 834$ Гс в момент измерения [22] ещё не было известно. Кроме того, температурные эффекты были более существенны.

5.2.2 Измерение β и проверка универсальности по скорости звука

Метод измерения скорости звука, изложенный в разделе 3.7 на странице 78, позволяет измерить универсальную постоянную β и проверить гипотезу об универсальности сильно взаимодействующего ферми-газа атомов. Этот новый метод измерения β , в отличие от изложенного в предыдущем подразделе 5.2.1, менее чувствителен к неоднородности фазового состояния газа в облаке. Неоднородность фазы связана с отличием температуры от нуля. Фазовое состояние какой-либо малой части облака зависит не от абсолютной температуры T , от отношения $T/\varepsilon_{\text{Ф}}$. При малой $T/E_{\text{Ф}}$, например $T/E_{\text{Ф}} = 0,04$, состояние наиболее плотной центральной части облака близко к основному, так как в центре $T/\varepsilon_{\text{Ф}}$ тоже мало. На краях облака $T/\varepsilon_{\text{Ф}}$ существенно выше, чем в центре, из-за меньшей плотности. Это приводит к уменьшению притягивающего среднего поля и, следовательно, к уширению облака, внося ошибку в измерение β . В распространение звуковой волны основной вклад вносит наиболее плотная часть облака, лежащая вблизи продольной оси симметрии z . При измерении β по скорости звука, таким образом, роль краёв падает, уменьшая связанную с ними возможную систематическую ошибку.

Установим связь между скоростью звука c_0 при $z = 0$ и величиной β . Подставив в формулу (3.42) уравнение состояния (5.2) и профиль концентрации (2.106), получим

$$c_0 = v_{\text{Ф}} \frac{(1 + \beta)^{1/4}}{\sqrt{5}}, \quad (5.5)$$

где $v_{\text{Ф}} = \sqrt{2E_{\text{Ф}}/m}$ — глобальная скорость Ферми идеального ферми-газа в параболическом потенциале.

Помимо изменения β , формула (5.5) даёт возможность независимой проверки универсальной гипотезы при $T = 0$. Если система универсальна, то $c_0/v_{\text{Ф}}$ — инвариант плотности. Для проверки универсальности скорость звука измерена вблизи резонанса Фешбаха при $B = 834 \pm 2$ Гс. Измерения проводились в газе различной плотности. Плотность в центре облака варьировалась путём выбора различной глубины ловушки, от 410 нК до 80 мкК, что соответствует 30-кратному диапазону изменения плотности. Во всех случаях отношение $c_0/v_{\text{Ф}}$ оставалось неизменным с точностью до 1,8%. Это наблюдение подтверждает универсальность на резонансе Фешбаха. Напротив, при $B = 821$ Гс отношение $c_0/v_{\text{Ф}}$ падает с уменьшением плотности. Сравнение измерений при 834 и 821 Гс также может служить аргументом в дискуссии о положении резонанса Фешбаха. Из измерений скорости звука при различной плотности следует, что резонанс находится ближе к 834 Гс [83], чем к 822 Гс [162, 24].

Измеряя скорость звука и пользуясь соотношением (5.5), можно найти

$$\beta = -0,565 \pm 0,015. \quad (5.6)$$

Доверительный интервал включает в себя лишь статистическую ошибку, возникающую из ошибок измерения c_0 , $v_{\text{Ф}}$ и магнитного поля. Неопределённость $v_{\text{Ф}}$ возникает из-за неопределённости N и частот ловушки. Все известные систематические поправки перечислены в подразделе 3.7.2 на странице 80 и учтены при расчёте β .

5.2.3 Сравнение результатов измерений и расчётов β

В таблице 5.1 сведены результаты измерений и расчётов универсальной постоянной β . Звёздочкой отмечены полученные в рамках диссертационной работы результаты (5.4) и (5.6).

В эксперименте с атомным ферми-газом реализуются условия задачи Берча, приведённой в подразделе 1.2.3 на странице 9. В условиях, близких к задаче Берча, могут находиться достаточно глубокие слои нейтронной звезды — такие, что межчастичное расстояние меньше длины s -волновых столкновений $a = -18,8$ фм. Однако нейтронная материя должна быть не слишком плотной, чтобы межчастичное расстояние превышало размер потенциала взаимодействия $r_0 \approx 2$ фм. Первые два вычислительных результата, перечисленные в таблице 5.1, получены в рамках задач, изначально поставленных для нейтронной материи. Таким образом, измерения над атомным газом позволяют проверять вычислительные методы ядерной физики.

Таблица 5.1 — Результаты расчётов и измерений универсальной постоянной β . Звёздочкой отмечены результаты (5.4) и (5.6), приведённые в этом разделе.

Метод	Значение β	Год	Коллектив, ссылка
Расчёты			
Уравнение Галицкого ¹⁾	$-0,674^{2)}$	2001	Heiselberg [3]
Приближение Вигнера–Зейтца ³⁾	$-0,33$	2001	Heiselberg [3]
Монте-Карло	$-0,56$	2003	Carlson и др. [163]
Самосогласованное применение состояния (2.100) и учёт флуктуаций	$-0,545$	2004	Strinati и др. [164]
Монте-Карло	$-0,58 \pm 0,01$	2004	Giorgini и др. [140]
Измерения			
По кинетической энергии газа, выпущенного из ловушки, в приближении $T = 0$	$-0,10 \pm 0,07$	2002	Duke Univ. [47]
По размеру облака	$-0,26 \pm 0,07$	2003	Duke Univ. [22]
По размеру облака	$-0,68^{+0,13}_{-0,10}$	2004	Univ. Innsbruck [19]
По кинетической энергии газа, выпущенного из ловушки	$-0,64 \pm 0,15$	2004	Ecole Normale Supérieure [162]
*По размеру облака	$-0,49 \pm 0,04$	2005	Duke Univ. ([97] и подраздел 5.2.1)
По размеру облака	$-0,54 \pm 0,05$	2006	Rice Univ. [26]
По размеру облака	$-0,54^{+0,05}_{-0,12}$	2006	JILA [165]
*По скорости звука	$-0,565 \pm 0,015$	2007	Duke Univ. ([143] и подраздел 5.2.2)
Реконструкция локальной плотности. Экстраполяция к $T = 0$	$-0,58$	2010	Univ. Electro-Communications [70]
¹⁾ Виктор Михайлович Галицкий, 1924–1981 ²⁾ В уравнении (11) работы [3] должно стоять $\frac{6}{35\pi}$ вместо $\frac{6}{35}\pi$ (Н. Heiselberg, частная переписка). ³⁾ Frederick Seitz, 1911–2008			

5.3 Универсальность при произвольной температуре

5.3.1 Термодинамические величины

Найдём ограничения на термодинамические величины, возникающие из условия универсальности при произвольной температуре T . В последующих подразделах 5.3.2 и 5.3.3 эти величины применены для вывода уравнений универсальной гидродинамики и вириальной теоремы.

Рассмотрим малый объём ΔV , содержащий ΔN частиц в каждом из двух спиновых состояний. Концентрация частиц в каждом спиновом состоянии $n = \Delta N/\Delta V$. Внутренняя энергия $E_{\text{внутр. } \Delta V}$ объёма ΔV складывается из кинетической энергии и энергии взаимодействия. Найдём $E_{\text{внутр. } \Delta V}$. Наиболее общий вид $E_{\text{внутр. } \Delta V}$, не противоречащий универсальности и аддитивности:

$$E_{\text{внутр. } \Delta V} = 2\Delta N \varepsilon_{\Phi}(n) f_E \left(\frac{T}{\varepsilon_{\Phi}(n)} \right), \quad (5.7)$$

где f_E — безразмерная функция, которая может быть найдена в явном виде в частных случаях:

$$f_E = \frac{3}{5}(1 + \beta) \quad \text{при} \quad T = 0, \quad (5.8)$$

$$f_E = \frac{3}{2} \frac{T}{\varepsilon_{\Phi}(n)} \quad \text{при} \quad T \gg \varepsilon_{\Phi}(n). \quad (5.9)$$

Первое из этих выражений следует из уравнения (2.109), а второе — результат для идеального газа, которым универсальная система становится при больших температурах.

Для энтропии объёма ΔV наиболее общее выражение, не противоречащее универсальности, имеет вид

$$\Delta S = 2 \Delta N f_S \left(\frac{T}{\varepsilon_{\Phi}(n)} \right). \quad (5.10)$$

Это выражение может содержать вклад как от сверхтекучей, так и нормальной компоненты. На одну частицу приходится энтропия f_S .

Давление может быть найдено, используя термодинамическое определение

$$P \equiv - \left(\frac{\partial E_{\text{внутр. } \Delta V}}{\partial(\Delta V)} \right)_{\Delta N, \Delta S}. \quad (5.11)$$

Условие на постоянство ΔN и ΔS при взятии производной подразумевает постоянство отношения T/ε_{Φ} , что можно видеть из уравнения (5.10). Таким образом, в выражении (5.11) взятие производной сводится к дифференцированию $(\partial \varepsilon_{\Phi}/\partial(\Delta V))_{\Delta N}$, и формула давления принимает вид

$$P = \frac{2}{3} \mathcal{E}, \quad (5.12)$$

где \mathcal{E} — локальная плотность энергии, складывающаяся из плотности кинетической энергии и энергии взаимодействия частиц в двух спиновых состояниях:

$$\mathcal{E} = 2n \varepsilon_{\Phi}(n) f_E \left(\frac{T}{\varepsilon_{\Phi}(n)} \right). \quad (5.13)$$

Формула (5.12), дающая простую связь между давлением и плотностью энергии, была ранее получена в работе [106]. В универсальном случае наиболее общий вид давления

$$P(n, T) = n^{5/3} f_P \left(\frac{T}{\varepsilon_{\Phi}(n)} \right). \quad (5.14)$$

Эта формула и выражение (5.12) будут использованы для вывода уравнений универсальной гидродинамики и вириальной теоремы в последующих двух подразделах.

5.3.2 Универсальная гидродинамика сверхтекучей и нормальной фазы

Уравнение Эйлера и уравнение непрерывности

Подраздел посвящён впервые проведённой проверке универсальной гипотезы при конечных температурах. Показано, что динамика сильно взаимодействующего ферми-газа в ловушке согласуется с уравнениями универсальной гидродинамики в широком интервале температур. Кроме подтверждения универсальной гипотезы отсюда следует, что в этом интервале температур система является жидкостью.

Начнём с вывода уравнений универсальной изоэнтропийной гидродинамики, а также их решения для дышащей моды и свободного разлёта. Основная роль в решении уравнений принадлежит Джону Томасу. Вообще говоря, применимость гидродинамических уравнений оправдана как минимум в двух случаях:

- для нормальной системы с большим числом столкновений;
- для сверхтекучей системы, обладающей макроскопической волновой функцией.

Вывод уравнений гидродинамики из микроскопического гамильтониана, как для сверхтекучей так и для нормальной фазы, можно найти в лекциях Н. Н. Боголюбова⁴⁾ [166, 167, 168]. Этот вывод проведён для слабозаимодействующих систем и учитывает лишь парные взаимодействия. Для сильно взаимодействующих систем в гамильтониане должны учитываться 3-частичные взаимодействия и взаимодействия более высоких порядков. Такой вывод, насколько известно автору диссертации, отсутствует, поэтому введём уравнение Эйлера⁵⁾ в качестве гипотезы.

Гипотезу о справедливости уравнений гидродинамики дополним гипотезой о локальной изоэнтропийности движения. При этом условии скорости сверхтекучего и нормального потока должны быть одинаковы, поскольку эти фазы обладают разной энтропией в расчёте на одну частицу. Условие локальной адиабатичности является разумным в применимости к описанию разлёта облака и дышащей моды. В этих ситуациях движение возникает при переключении внешних потенциалов, одинаково действующих как на частицы сверхтекучей, так и нормальной фазы, не возбуждая их относительного движения. Таким образом, в изоэнтропийном случае нет необходимости отдельно рассматривать плотности сверхтекучей и нормальной фазы. В уравнение Эйлера входит лишь полная локальная концентрация атомов в каждом спиновом состоянии n :

$$m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + m(\vec{u}, \nabla) \vec{u} = -\nabla U - \frac{\nabla P}{2n}, \quad (5.15)$$

где $P(\vec{x}, t)$ — поле термодинамических давлений, $\vec{u}(\vec{x}, t)$ — поле гидродинамических скоростей, m — масса атома. При записи этого уравнения также предполагаем, что частицы в обоих спиновых состояниях обладают одинаковыми концентрациями и движутся одинаково. Поскольку в рассматриваемых экспериментах отсутствуют вращательные возбуждения, ограничимся случаем $\text{rot } \vec{u} = 0$ и перепишем уравнение Эйлера в виде

$$m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla U - \frac{\nabla P}{2n} - \nabla \frac{m\vec{u}^2}{2}. \quad (5.16)$$

Дополнив уравнение Эйлера уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{u}n = 0, \quad (5.17)$$

⁴⁾Николай Николаевич Боголюбов, 1909–1992

⁵⁾Leonhard Euler, 1707–1783

получим 4 уравнения на 5 неизвестных n , \vec{u} и P . Для решения необходимо ещё одно уравнение, например, уравнение состояния $P = P(n, T)$.

Уравнение состояния и решения при $T = 0$

При $T = 0$ уравнение состояния $P = P(n)$ универсальной системы

$$P(n) = (1 + \beta) \frac{2}{5} 2n \varepsilon_\Phi = (1 + \beta) \frac{2}{5} 2 \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2)^{2/3} n^{5/3}, \quad (5.18)$$

что следует из уравнений (5.12), (5.13) и (5.8). Универсальность системы при $T = 0$, а следовательно и вид уравнения (5.18) подтверждён измерениями скорости звука, изложенными в подразделе 5.2.2.

Рассматриваемое уравнение состояния принадлежит к более широкому классу уравнений вида (5.14). Ниже в этом подразделе получены относящиеся к эксперименту решения уравнений гидродинамики (5.16) и (5.17) для уравнений состояния вида (5.14), в том числе для уравнения состояния (5.18).

Уравнение состояния и решения при $\forall T$

При ненулевой температуре уравнение состояния может быть более сложным, чем (5.18), и зависеть от локальной температуры $T(\vec{x})$. Наиболее общий вид уравнения состояния в унитарном пределе отвечает выражению (5.14). Покажем, что такой общий вид уравнения состояния достаточен для решения гидродинамических уравнений (5.16) и (5.17) в двух случаях:

- разлёт облака, находившегося в начальный момент времени в гармоническом потенциале в стационарном состоянии. Разлёт может быть в свободное пространство или в другой параболический потенциал, например, потенциал магнитного поля (3.7);
- малые колебания в гармоническом потенциале относительно стационарного состояния.

Рассмотрение параболических потенциалов позволяет искать решения в виде автоматической подстановки [169, 170, 136, 134], при которой изменения во времени сводятся к масштабированию при помощи коэффициентов $b_x(t)$, $b_y(t)$, $b_z(t)$:

$$n(\vec{x}, t) = \frac{n_0(x/b_x, y/b_y, z/b_z)}{b_x b_y b_z}, \quad u_i = x_i \frac{\dot{b}_i}{b_i}, \quad (5.19)$$

где $n_0(\vec{x})$ — стационарное распределение плотности. При использовании этой подстановки уравнение непрерывности (5.17) выполняется тождественно, поэтому в дальнейшем рассматриваются лишь преобразования уравнения Эйлера (5.16).

При локально изоэнтропийном сжатии или разлёте объёма ΔV , содержащего неизменное число частиц ΔN , приведённая температура T/ε_F остаётся неизменной, что видно из формулы (5.10). Отсюда следует, что

$$\frac{T(\vec{x}, t)}{\varepsilon_\Phi(n(\vec{x}, t))} = \frac{T_0}{\varepsilon_\Phi(n_0(x/b_x, y/b_y, z/b_z))}, \quad (5.20)$$

где T_0 — температура в начальном состоянии, которое считаем стационарным. Вместе с условием (5.14) это уравнение означает, что давление может быть выражено через его начальное распределение:

$$P(\vec{x}, t) = \frac{P_0(x/b_x, y/b_y, z/b_z)}{(b_x b_y b_z)^{5/3}}. \quad (5.21)$$

В свою очередь, начальное давление может быть найдено из уравнения баланса сил:

$$\nabla P(\vec{x}) + 2n(\vec{x})\nabla U^{\text{стац.}}(\vec{x}) = 0. \quad (5.22)$$

В результате чего получим

$$\frac{\nabla P(\vec{x}, t)}{n(\vec{x}, t)} = -\frac{\nabla U^{\text{стац.}}(x/b_x, y/b_y, z/b_z)}{(b_x b_y b_z)^{2/3}}. \quad (5.23)$$

Это выражение позволяет переписать уравнение Эйлера (5.16) в виде

$$m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{m\vec{u}^2}{2} + U(\vec{x}) - \frac{U^{\text{стац.}}(x/b_x, y/b_y, z/b_z)}{(b_x b_y b_z)^{2/3}} \right) \quad (5.24)$$

и решить при помощи автомодельной подстановки (5.19). В последнем уравнении введены различные обозначения для потенциала в стационарном состоянии $U^{\text{стац.}}$ и потенциала в моменты движения U . Потенциалы $U^{\text{стац.}}$ и U могут быть различны: например, при свободном разлёте жидкости, выпущенной из ловушки, $U = 0$; а в случае колебаний газа в ловушке $U = U^{\text{стац.}}$.

Важный и интересный результат — отсутствие зависимости от температуры в уравнении (5.24). То есть изоэнтروпийная гидродинамика одинакова как для уравнения состояния (5.18), так и для более общего (5.14).

Решим уравнение универсальной изоэнтропийной гидродинамики (5.24) для двух случаев: разлёта после выключения ловушки и дышащей моды. В обоих случаях

$$U^{\text{стац.}}(x, y, z) = \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}. \quad (5.25)$$

В простейшем случае разлёта $U = 0$, что даёт уравнение Ермакова⁶⁾ [171] на b_i

$$\ddot{b}_i - \frac{\omega_i^2}{b_i(b_x b_y b_z)^{2/3}} = 0 \quad (5.26)$$

с начальными условиями $b_i(0) = 1$, $\dot{b}_i(0) = 0$. В веретенообразной ловушке $\omega_x \approx \omega_y$, $\omega_z \ll \omega_x$. В этих условиях при разлёте b_z остаётся почти неизменным, а $b_{x,y}$ увеличивается существенно быстрее, чем при разлёте идеального газа, в котором $b_i(t) = \sqrt{1 + \omega_i^2 t^2}$. Разлёт сильновзаимодействующего ферми-газа впервые наблюдался в работе [47].

В эксперименте при разлёте U слегка отлично от нуля из-за кривизны постоянного магнитного поля, используемого для настройки резонанса Фешбаха, что можно учесть, положив $U = U_B$, где небольшой магнитный потенциал $U_B(\vec{x})$ задаётся формулой (3.7). В этом случае уравнения разлёта примут вид

$$\ddot{b}_i + \omega_B^2 b_i - \frac{\omega_i^2}{b_i(b_x b_y b_z)^{2/3}} = 0, \quad i = x, z \quad (5.27)$$

$$\ddot{b}_y - 2\omega_B^2 b_y - \frac{\omega_y^2}{b_y(b_x b_y b_z)^{2/3}} = 0. \quad (5.28)$$

Перейдём к рассмотрению радиальной дышащей моды. Найдём её частоту. Мода может быть возбуждена сжатием газа сразу в обоих радиальных направлениях x и y . Для колебаний газа в ловушке $U = U^{\text{стац.}}$, что даёт уравнения на коэффициенты b_i :

$$\ddot{b}_i + \omega_i^2 b_i - \frac{\omega_i^2}{b_i(b_x b_y b_z)^{2/3}} = 0. \quad (5.29)$$

⁶⁾Василий Петрович Ермаков, 1845–1922

Линеаризуем эту систему уравнений для случая малых колебаний $b_i = 1 + e_i$, $|e_i| \ll 1$:

$$\ddot{e}_i + \omega_i^2 \left(2e_i + \frac{2}{3}(e_x + e_y + e_z) \right) = 0. \quad (5.30)$$

В случае $\omega_x = \omega_y \gg \omega_z \approx 0$ у облака две собственные частоты:

$$\omega_{\text{г/д}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \omega_{\perp} = 1,83 \omega_{\perp}, \quad (5.31)$$

$$\omega_{\text{г/д}} = \sqrt{2} \omega_{\perp}, \quad (5.32)$$

где

$$\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y}. \quad (5.33)$$

Большая собственная частота соответствует дышащей моде, в которой деформация вдоль x и y происходит в фазе ($e_x = e_y$), а меньшая частота — квадрупольной моде, в которой движение по x и y в противофазе ($e_x = -e_y$).

Для случая небольшого отклонения от цилиндрической симметрии ($|\omega_x - \omega_y| \ll \omega_{\perp}$) частота дышащей моды может быть выражена через формулу (5.31) и малую поправку:

$$\omega_{\text{г/д}} = \sqrt{\frac{4}{3}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{16}{9}\omega_x^2\omega_y^2 + \frac{16}{9}(\omega_x - \omega_y)^2} \approx \sqrt{\frac{10}{3}} \omega_{\perp} + \sqrt{\frac{10}{3}} \frac{(\omega_x - \omega_y)^2}{\omega_{\perp}}. \quad (5.34)$$

Отличие ω_z от нуля не учтено, так как для типичных условий эксперимента это дало бы поправку в частоте порядка $\omega_z^2/\omega_{\perp}^2 \approx 0,002$. Эта поправка лежит за пределами точности измерений.

Экспериментальная проверка универсальной гидродинамики при $T \geq 0$

Расчёты, изложенные выше в этом подразделе, создают основу для экспериментальной проверки универсальности при произвольной температуре. При условии универсального уравнения состояния (5.14) получено уравнение Эйлера в виде (5.24). Видно, что это уравнение не зависит от температуры. Из уравнения (5.24) найдена частота поперечной дышащей моды (5.31), также не зависящая от температуры. Таким образом, проверка того, что в широком диапазоне температур частота остаётся неизменной, станет подтверждением того, что газ сильно взаимодействующих ферми-атомов — универсальная система.

Для проверки универсальности частота дышащей моды измерена в эксперименте в широком интервале температур $T = (0,04-1,1)E_{\text{Ф}}$. В каждом повторении эксперимента газ ферми-атомов лития-6 приготавливался в двух равнонаселённых спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$, по $N = 100\,000 \pm 10\,000$ атомов в каждом. Внешний потенциал представляет собой веретенообразную ловушку глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10$ Гц), $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 71 \pm 3$ Гц. Внешний потенциал для газа близок к параболическому, поскольку $E_{\text{Ф}} = 2,4$ мкК $\ll U_0$ и $T \ll U_0$. Газ находится в режиме сильного взаимодействия благодаря внешнему магнитному полю $B = 840$ Гс, величина которого близка к s -волновому резонансу Фешбаха при 834 Гс, что даёт параметр взаимодействия $k_{\text{Ф}}a = -30$. Большая величина $k_{\text{Ф}}|a|$ аналогична выполнению той части условия универсальности (5.1), которая требует $|a| \gg n^{-1/3}$. Вторая часть условия универсальности, $n^{-1/3} \gg r_0$, в ультрахолодных атомных газах выполнена с большим запасом: r_0 на 3–4 порядка меньше межчастичного расстояния. Во всех случаях газ охлаждается до наименьшей достижимой относительной температуры $T/E_{\text{Ф}} \approx 0,04$. Затем, температура повышается до различных значений путём контролируемого ввода

энергии, описанного в разделе 3.6 на странице 76. Измерение температуры происходит по эмпирической температурной шкале $(T/E_\Phi)_{\text{эмп.}}$, которая пересчитывается в термодинамическую температуру T/E_Φ при помощи модели, описанной в работе [97]. Принципы пересчёта эмпирической температуры в термодинамическую изложены в подразделе 3.5.3 на странице 72, а график пересчёта показан на рисунке 3.11. Возбуждение дышащей моды и измерение её частоты описано в разделе 3.3 на странице 67. Для возбуждения колебаний ловушка быстро выключается, а затем, спустя $t_{\text{выкл.}} = 25$ мкс, резко восстанавливается. Процесс возбуждения вводит в газ небольшое количество энергии, которым, однако, можно пренебречь, поскольку величина введённой энергии в расчёте на один атом составляет $0,012 E_\Phi$, что можно вычислить по формуле (3.31).

Измеренная зависимость частоты дышащей моды от температуры показана на рисунке 5.1. Частота на графике нормирована на поперечную частоту ловушки ω_\perp . Во всём

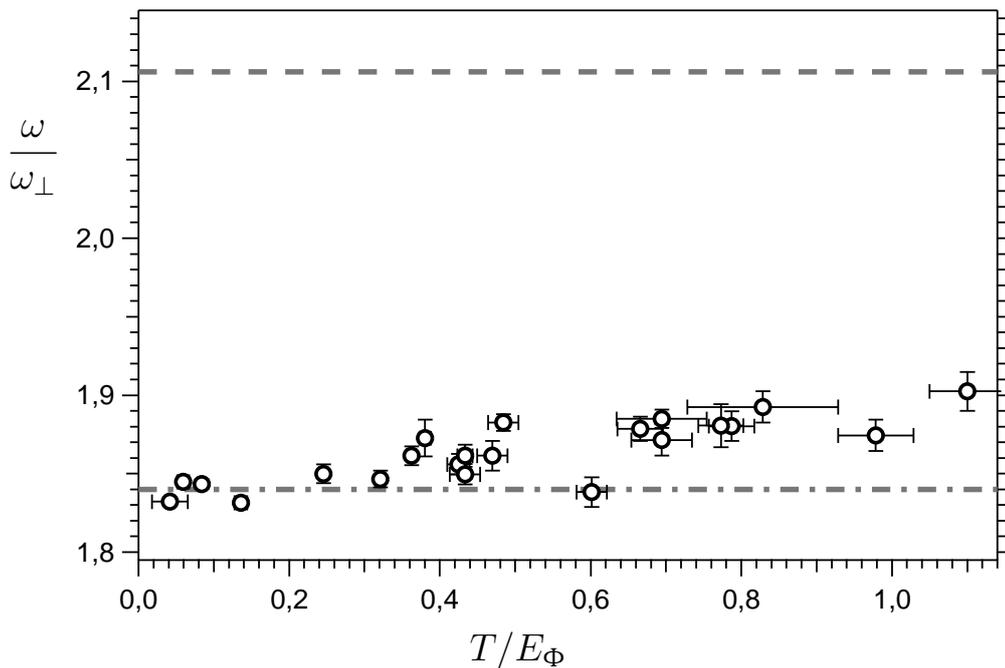


Рисунок 5.1 — Нормированная частота дышащей моды в зависимости от T/E_Φ (кольца).

Штрих-пунктирная линия — предсказанная частота гидродинамических колебаний $1,84\omega_\perp$. Вверху штриховой линией показана частота дышащей моды идеального газа $2\omega_x = 2,106\omega_\perp$.

интервале температур частота моды лежит вблизи значения

$$\omega_{\text{г/д}} = 1,84\omega_\perp, \quad (5.35)$$

предсказанного в рамках универсальной гидродинамики по формуле (5.34). Отсюда следует, что сильно взаимодействующий газ представляет собой жидкость в широком интервале температур. Если бы с изменением T/E_Φ система переставала быть жидкостью, то частота колебаний увеличивалась бы до частоты дышащей моды идеального ферми-газа $2\omega_x = 2,106\omega_\perp$ или ещё большей величины, связанной со средним полем, как показано в разделе 6.2 на странице 110. В идеальном газе частота дышащей моды вдоль направления x_i равна $2\omega_i$. Мода идеального газа складывается из движения независимых частиц, каждая из которых колеблется с частотой ω_i . В сильно взаимодействующем ферми-газе, как видно из измерений, во всём интервале температур частота существенно не возрастает, и система, таким образом, остаётся жидкостью. По наблюдению одной

лишь частоты, однако, нельзя сказать, является ли система жидкостью из-за наличия сверхтекучей фазы или из-за большого числа столкновений. Проявление сверхтекучести исследовано в главе 6.

Измеренные значения частоты находятся в согласии с предсказаниями универсальной гидродинамики. Это измерение служит подтверждением гипотезы об универсальности сильновзаимодействующего газа ферми-атомов. Таким образом, впервые при отличных от нуля температурах удалось подтвердить гипотезу об универсальности ферми-системы в режиме резонансных парных столкновений. Приведённые в подразделе результаты опубликованы автором диссертации и коллегами в работе [133].

5.3.3 Вириальная теорема

Для универсальной системы в термодинамическом равновесии, помещённой в параболический потенциал, может быть доказана вириальная теорема:

$$2N \langle U \rangle = \frac{E_{\text{полн.}}}{2}, \quad (5.36)$$

где $E_{\text{полн.}}$ — полная энергия системы $2N$ частиц в ловушке, $\langle U \rangle$ — средняя потенциальная энергия одной частицы, полученная усреднением по распределению концентрации

$$\langle U \rangle = \frac{1}{N} \int n(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (5.37)$$

Какие-либо ограничения на температуру не накладываются.

Вириальная теорема (5.36) имеет такой же простой вид, как и для одной частицы или идеального ферми-газа, несмотря на то, что в полную энергию $E_{\text{полн.}}$ входит энергия взаимодействия. Теорема верна для системы, содержащей произвольное число спиновых компонент. Единственным требованием является универсальность. Полное число частиц обозначено $2N$, независимо от числа спиновых переменных, а полная локальная концентрация — $2n(\vec{x})$. Эти обозначения выбраны, поскольку ниже описана проверка теоремы на примере двухспиновой системы — атомного газа в режиме резонансных взаимодействий между атомами в двух равнонаселённых спиновых состояний, по N частиц в каждом.

Доказательство теоремы основано на уравнении баланса сил (5.22) и связи между давлением и внутренней энергией (5.12). Ни то, ни другое уравнение не зависит от числа спиновых компонент в системе. Скалярно умножим уравнение (5.22) на \vec{x} , а затем проинтегрируем по координатам, используя равенство $\vec{x} \cdot \nabla U(\vec{x}) = 2U(\vec{x})$. В результате найдём, что

$$2N \langle U \rangle = \frac{3}{2} \int P(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (5.38)$$

Применив в этом равенстве уравнение (5.12), получим

$$2N \langle U \rangle = \int \mathcal{E}(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (5.39)$$

Воспользовавшись определением полной энергии системы в виде

$$E_{\text{полн.}} \equiv 2N \langle U \rangle + \int \mathcal{E}(\vec{x}) d^3\vec{x}, \quad (5.40)$$

можно получить вириальную теорему (5.36).

Впервые вириальная теорема для универсальной системы сформулирована и доказана в работе [133], соавтором которой является автор диссертации. Основная роль в формулировке и доказательстве теоремы принадлежит Джону Томасу, который позже обобщил её для потенциала произвольной формы [172].

Вириальная теорема может быть использована для измерения энергии, как описано в разделе 3.5.4 на странице 75. Перепишем теорему в виде

$$E = 3m\omega_x^2 \langle x^2 \rangle, \quad (5.41)$$

где $E \equiv E_{\text{полн.}}/2N$ — энергия, в среднем приходящаяся на одну частицу. Частоты ловушки могут быть измерены, как описано в разделе 3.4 на странице 68. Среднеквадратичный размер облака $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ также измерим. Источником информации служат фоторафии газа, подобные снимку 3.5 на странице 65. Вышесказанное позволяет проводить прямое измерение энергии универсального газа.

Если энергия E и размер $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ известны из независимых источников, то можно проверить справедливость вириальной теоремы в форме (5.41) и, таким образом, проверить гипотезу об универсальности ферми-газа с резонансными s -волновыми взаимодействиями. Для проверки вириальной теоремы газ ферми-атомов лития-6 готовится при различных энергиях из широкого интервала $E = (0,54-2,0)E_{\text{Ф}}$, а затем измеряется размер облака. Энергия и размер определяются независимо. В каждом повторении эксперимента атомы населяют два спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$ — по $N = 110\,000 \pm 15\,000$ частиц в каждом. Внешний потенциал представляет собой веретенообразную ловушку глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10 \text{ Гц})$, $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 71 \pm 3$ Гц. Газ находится в режиме сильного взаимодействия благодаря внешнему магнитному полю $B = 840$ Гс, величина которого близка к s -волновому резонансу Фешаха при 834 Гс, что даёт параметр взаимодействия $k_{\text{Ф}}a = -30$. Большая величина $k_{\text{Ф}}|a|$ аналогична выполнению той части условия универсальности (5.1), которая требует $|a| \gg n^{-1/3}$. Вторая часть условия универсальности, $n^{-1/3} \gg r_0$, в ультрахолодных атомных газах выполнена с большим запасом: r_0 на 3–4 порядка меньше межчастичного расстояния. Во всех случаях газ охлаждается до состояния близкого к основному. Это даёт минимально достижимую энергию на частицу $E \approx E_0 \equiv E_{\text{осн.}}/2N$. Затем энергия контролируемым образом повышается. Ввод энергии описан в разделе 3.6 на странице 76. Там же приведён метод расчёта энергии E на частицу после ввода, а также оценка наименьшего достижимого значения $E = \eta E_0$. Внешний потенциал для газа близок к параболическому, поскольку $E \ll U_0$, что видно из значения $E_{\text{Ф}} = 2,5$ мкК и интервала энергий $E = (0,54-2,0)E_{\text{Ф}}$. Исследованный интервал энергий примерно соответствует интервалу приведённых температур $T/E_{\text{Ф}} = 0-0,6$. Температура измеряется по эмпирической шкале $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}}$, описанной в подразделе 3.5.3 на странице 72, а эмпирическая шкала в свою очередь преобразуется к значениям $T/E_{\text{Ф}}$ при помощи графика 3.11.

Для проверки вириальной теоремы и универсальности газа измеряется среднеквадратичный размер облака вдоль направления x . По сравнению с направлением z измерение вдоль x более предпочтительно, поскольку ω_x известна точнее, чем ω_z . Большая оптическая плотность не позволяет проводить измерение непосредственно над газом в ловушке. Поэтому фотографированию предшествовало быстрое выключение ловушки и разлёт газа в течение времени $t_{\text{расш.}}$. На основе фотографий рассчитан квадрат размера разлетевшегося газа $\langle x^2 \rangle_{\text{расш.}}$, из которого размер газа в ловушке находится по формуле

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\langle x^2 \rangle_{\text{расш.}}}{b_x^2}, \quad (5.42)$$

где $b_x = b_x(t_{\text{расш.}})$ — коэффициент гидродинамического расширения, найденный из уравнений (5.27) и (5.28). При расчёте коэффициента учтены малые поправки, связанные с ангармонизмом потенциала, описанные в приложении Б. Верность гидродинамической теории, лежащей в основе расчёта b_x , проверена в предыдущем подразделе 5.3.2.

Если вириальная теорема в форме (5.41) верна, то справедливо равенство

$$\frac{\langle x^2 \rangle_E}{\langle x^2 \rangle_{E_0}} = \frac{E}{E_0}, \quad (5.43)$$

где E_0 — энергия на частицу в основном состоянии, $\langle x^2 \rangle_E$ — квадрат размера в состоянии с энергией E . На рисунке 5.2 показана зависимость $\langle x^2 \rangle_E / \langle x^2 \rangle_{E_0}$ от E/E_0 . В основном со-

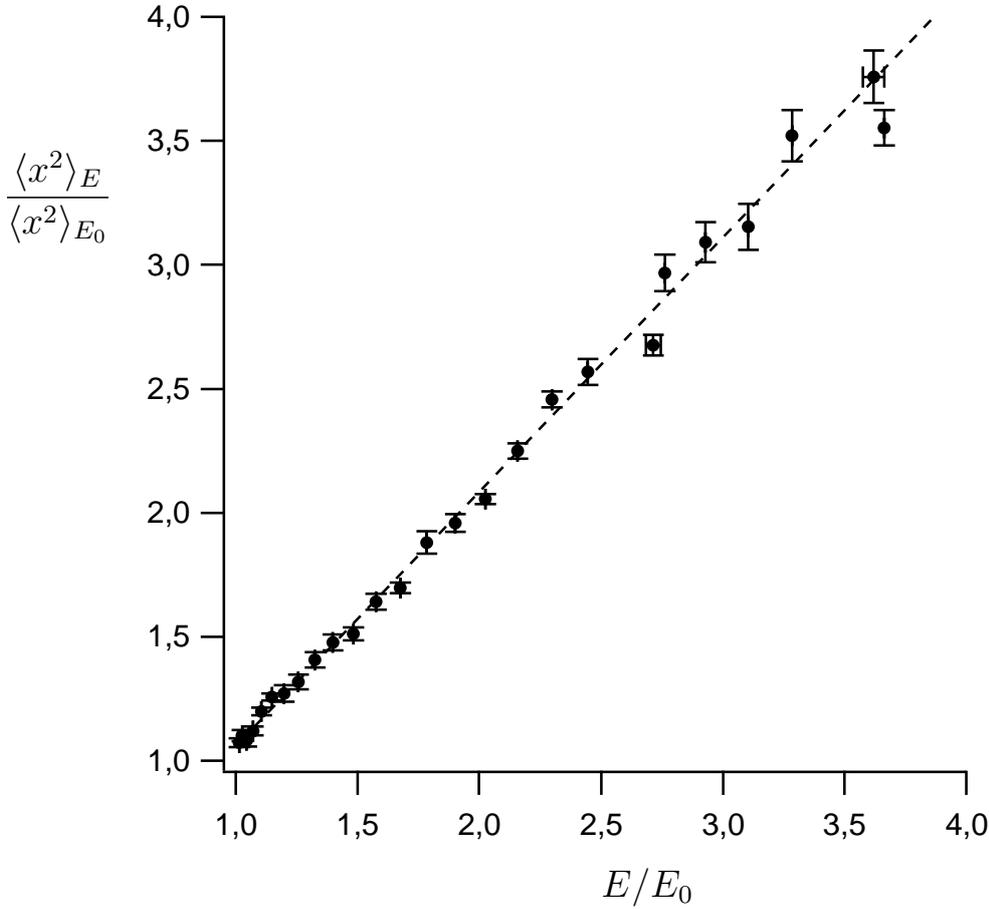


Рисунок 5.2 — Проверка вириальной теоремы. Измеренная зависимость $\langle x^2 \rangle_E / \langle x^2 \rangle_{E_0}$ от E/E_0 (точки) и подгонка данных прямой (5.45) (штриховая линия).

стоянии энергия на частицу и квадрат размера соответственно выражаются через энергию Ферми и радиус Томаса–Ферми (5.3):

$$E_0 = \frac{3}{4} E_\Phi \sqrt{1 + \beta} \quad \text{и} \quad \langle x^2 \rangle_{E_0} = \frac{R_x^2}{8} = \frac{E_\Phi \sqrt{1 + \beta}}{4m\omega_x^2}. \quad (5.44)$$

В этих формулах использована гипотеза об универсальности при нулевой температуре, проверенная в подразделе 5.2.2 для широкого диапазона плотностей. В подразделах 5.2.1 и 5.2.2 описаны два способа измерения β — по размеру облака и скорости звука, дающие чуть разные значения $\beta = -0,49 \pm 0,04$ и $-0,565 \pm 0,015$ соответственно. Здесь использовано первое значение, поскольку оно получено тем же методом, что и измерен $\langle x^2 \rangle$. Впрочем, выбор величины β не влияет на наиболее важный результат, видный на графике 5.2: путём подгонки можно установить, что данные лежат на прямой с почти единичным наклоном

$$\frac{\langle x^2 \rangle_E}{\langle x^2 \rangle_{E_0}} = (1,03 \pm 0,02) \frac{E}{E_0}, \quad (5.45)$$

показанную на графике пунктиром. То есть зависимость энергии от квадрата размера ведёт себя в соответствии с вириальной теоремой. Это является экспериментальным подтверждением вириальной теоремы и проверкой универсальной гипотезы при конечной

температуре. В этом и предыдущем подразделе, таким образом, сообщается о впервые выполненных проверках универсальности резонансно взаимодействующей ферми-системы при конечной температуре. Кроме того, в этом подразделе сообщено о впервые выполненной проверке вириальной теоремы для сильно взаимодействующей системы. Приведённые в подразделе результаты опубликованы автором диссертации и коллегами в работе [133].

Глава 6

Сверхтекучесть

6.1 Поиск признаков сверхтекучести

В самом первом эксперименте с сильно взаимодействующим газом ферми-атомов [47] было видно, что при низких температурах система является жидкостью. Система состояла из равного числа атомов лития-6 в двух спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$ в режиме сильного взаимодействия, при $k_{\text{фа}} = -5,4$. На рисунке 6.1 показаны фотографии разлёта облака, выпущенного из веретенообразной ловушки при температуре $T \approx 0,1E_{\text{Ф}}$. Снимки сделаны в Университете имени Дюка в 2002 году [47] без участия автора диссертации. Газ так раз-

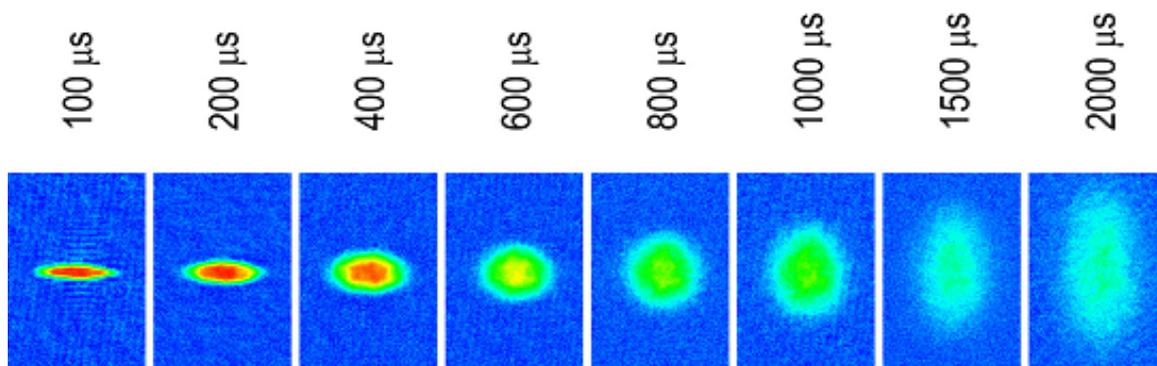


Рисунок 6.1 — Гидродинамический разлёт облака. Над каждым снимком подписано время, прошедшее после выпуска газа из веретенообразной ловушки. Из работы [47].

летаться не может. На снимках видно, что облако, изначально имевшее форму веретена, превращается в диск — продольный (горизонтальный) размер облака остаётся неизменным, а поперечный многократно возрастает. Газ в отличие от жидкости при расширении принимал бы форму шара, а не диска, поскольку начальное распределение частиц по импульсам изотропно. Наблюдавшееся анизотропное расширение удовлетворяет уравнению Эйлера для жидкости. Качественно анизотропную форму разлёта можно объяснить расширением в направлении наибольшего начального градиента давления. Количественно разлёт жидкости исследован в подразделе 5.3.2 на страницах 99–104.

Сразу после наблюдения гидродинамического разлёта встал вопрос о том, что же заставляет разреженный газ стать жидкостью. В принципе, у газа есть две возможности для этого:

- образовать сверхтекучую фазу, как это, например, происходит при бозе-эйнштейновской конденсации или

- образовать нормальную жидкость под воздействием большого числа межчастичных соударений.

Выдвигались предположения, что существование нормальной жидкости при столь низких температурах вряд ли возможно, поскольку из-за запрета Паули число столкновений весьма мало — почти все квантовые состояния вблизи сферы Ферми заполнены, и сталкивающимся частицам некуда рассеиваться. Однако было невозможно исключить возникновение гидродинамики из-за столкновений, а не сверхтекучести [47]. В Массачусетском институте технологии было предложено объяснение гидродинамического разлёта при $T = 0$ в отсутствие сверхтекучей фазы [173]: в ловушке находится нормальный бесстолкновительный газ; после выключения ловушки, с началом разлёта сфера Ферми сильно деформируется, что снимает запрет Паули на столкновения, приводя к появлению нормальной жидкости и гидродинамического потока.

Таким образом, анизотропный разлёт стал аргументом в пользу сверхтекучести. Однако аргумент неоднозначен из-за того, что наблюдение произведено не над той системой, которая исследуется, а над её производной.

Новые аргументы в поддержку сверхтекучести появились в начале 2004 года — результаты похожих экспериментов были опубликованы в январе [174] и марте [175]. После приготовления ферми-газа вблизи резонанса Фешбаха магнитное поле достаточно быстро переключалось вдалеке от резонанса на бозевскую сторону, после чего наблюдался бозе-эйнштейновский конденсат двухатомных молекул. Если бы переключение поля было мгновенным, то состояние ферми-газа проецировалось бы на состояние газа молекул. В этом случае, наблюдение конденсата молекул однозначно свидетельствовало бы о наличии конденсата пар атомов в изучаемой системе — ферми-газе на резонансе. А бозе-эйнштейновская конденсация, в свою очередь, выступает достаточным условием сверхтекучести. Однако в этих экспериментах время переключения было сравнимо или много больше времён столкновения частиц ($\sim \hbar/E_\Phi$). Таким образом, распределение атомов по скоростям могло меняться в ходе переключения магнитного поля. Эксперименты [174, 175] снова не стали однозначными свидетельством сверхтекучести, поскольку измерения были выполнены не над оригинальной системой, а над её производной.

Впервые свидетельство сверхтекучести, полученное путём непосредственного наблюдения изучаемой системы, было опубликовано в апреле 2004 года автором диссертации и коллегами [6]. Наблюдались свойства дышащей моды газа в ловушке. Были рассмотрены возможные состояния газа и показано, что лишь сверхтекучесть удовлетворительно согласуется с измерениями.

Для того, чтобы установить, является ли система жидкостью ещё до начала разлёта, необходим метод исследования газа непосредственно в ловушке. В качестве такого метода в диссертации выбрано наблюдение дышащей моды облака.

В подразделе 5.3.2 на страницах 99–104 по частоте моды установлено, что система в ловушке действительно является жидкостью. Однако не выяснено, идёт ли речь о нормальной или сверхтекучей жидкости. Раздел 6.3 настоящей главы посвящён выяснению фундаментального вопроса о сверхтекучести. Вывод о существовании сверхтекучей фазы сделан благодаря измерениям декремента дышащей моды при различных температурах. Показано, что для жидкости низкотемпературная часть зависимости декремента от температуры невозможна в отсутствие сверхтекучей фазы. Для этого в разделе 6.2 разработана модель дышащей моды нормального газа и жидкости со средним полем и произвольным числом столкновений. В разделе 6.3 приведены результаты измерения декремента и показано, что данные противоречат моделям нормальной жидкости/газа, и лишь сверхтекучая гидродинамика удовлетворительно объясняет наблюдаемую частоту и декремент моды.

В разделе 6.4 найдена температура фазового перехода, исходя из наблюдений дышащей моды. В разделе 6.5 исследованы свойства системы при произвольных s -волновых

взаимодействиях, а не только резонансных. Показано, что при уменьшении взаимодействия ниже определённой величины декремент и частота резко возрастают, что может быть интерпретировано как разрушение куперовских пар и согласуется со сверхтекучими свойствами на резонансе Фешбаха.

6.2 Моделирование дышащей моды нормального газа и нормальной жидкости при помощи кинетического уравнения

Построим модель 2-компонентного ферми-газа, в котором отсутствует сверхтекучая фаза и происходят столкновения между частицами. Будем описывать газ локальной фазовой плотностью частиц какой-либо спиновой компоненты $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Фазовые плотности двух компонент будем полагать равными. При малом числе столкновений система будет вести себя как газ, а при большом — как жидкость. В рамках этой модели исследуем частоту и декремент дышащей моды.

Ограничившись одночастичной фазовой плотностью $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, зависящей лишь координат только одной частицы, мы полагаем положения частиц в фазовом пространстве статистически независимыми. То есть мы пренебрегаем корреляциями в положениях частиц (§16 в [176]). Это предположение может быть справедливым лишь при малых фазовых плотностях. Таким образом, при низких температурах развиваемая здесь модель является приближённой и лишь качественно описывает частоту и декремент дышащей моды. Однако этой качественной модели будет достаточно, чтобы в разделе 6.3 показать, что наблюдаемые при низких температурах свойства дышащей моды не могут принадлежать нормальной фазе.

Для описания нормальной системы со столкновениями воспользуемся общим видом уравнения Больцмана¹⁾–Власова²⁾:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{1}{m} \frac{\partial (U_{\text{г.о.}} + U_{\text{ср.п.}})}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = I_{\text{ст.}}[f], \quad (6.1)$$

где $I_{\text{ст.}}[f]$ — интеграл столкновений, $U_{\text{г.о.}}(\vec{x}) = \frac{m}{2} \sum_i \omega_i^2 x_i^2$ — удерживающий гармонический потенциал, $U_{\text{ср.п.}}(\vec{x})$ — энергия межчастичного взаимодействия в приближении среднего поля. Для интеграла столкновений воспользуемся модельным приближением

$$I_{\text{ст.}}[f] \approx -(f - f_{\text{л.р.}}) \nu_{\text{ст.}}, \quad (6.2)$$

где $\nu_{\text{ст.}}$ — частота столкновений, которую полагаем одинаковой во всём объёме, а $f_{\text{л.р.}}$ — функция распределения в точке \vec{x} в приближении локального равновесия. Концентрация, получаемая из $f_{\text{л.р.}}$, та же что и из f , а распределение по скоростям — равновесное. Уравнения (6.1) и (6.2) составляют основу модели. Основным результатом этого раздела станут графики 6.2.

Речь идёт о моделировании колебаний облака простой формы, напоминающей веретено. Будем искать автомодельное решение, используя подстановку, применявшуюся в работе [134]:

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = \Gamma f_0(\vec{X}, \vec{V}), \quad \text{где} \quad X_i \equiv \frac{x_i}{b_i}, \quad V_i \equiv \frac{v_i - X_i \dot{b}_i}{\sqrt{\theta_i}}, \quad \Gamma \equiv \prod_j \frac{1}{b_j \sqrt{\theta_j}}, \quad (6.3)$$

¹⁾Ludwig Eduard Boltzmann, 1844–1906

²⁾Анатолий Александрович Власов, 1908–1975

а f_0 — равновесное распределение. Множители $b_i(t)$ и $\theta_i(t)$ отвечают за изменение размеров облака в пространстве координат и скоростей соответственно. Эта же подстановка позволяет моделировать разлёт облака. В этой подстановке, например, распределение концентрации каждой из спиновых компонент эволюционирует автомодельно:

$$n(\vec{x}, t) = \frac{n_0(x/b_x, y/b_y, z/b_z)}{b_x b_y b_z}, \quad (6.4)$$

а газодинамическая (гидродинамическая) скорость потока, $u_i(\vec{x}, t)$, равна

$$u_i(\vec{x}, t) = x_i \frac{\dot{b}_i}{b_i}. \quad (6.5)$$

Подставив автомодельное решение (6.3) в исходное уравнение (6.1), получим

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} f_0 + \Gamma \frac{\partial f_0}{\partial X_i} \frac{V_i \sqrt{\theta_i}}{b_i} - \\ - \Gamma \frac{\partial f_0}{\partial V_i} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial U(Xb_x, Yb_y, Zb_z)}{\partial X_i} \frac{1}{b_i \sqrt{\theta_i}} + \frac{X_i \ddot{b}_i}{\sqrt{\theta_i}} + V_i \left(\frac{\dot{b}_i}{b_i} + \frac{\dot{\theta}_i}{2\theta_i} \right) \right) = I_{\text{ст.}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где U — сумма потенциальной энергии и энергии среднего поля:

$$U \equiv U_{\text{г.о.}} + U_{\text{ср.п.}} \quad (6.7)$$

Уравнения на коэффициенты $b_i(t)$, $\theta_i(t)$ получим, вычислив моменты уравнения (6.6). Найдём уравнение на момент величины $X_i V_i$, то есть

$$\frac{1}{N} \int X_i V_i \text{ (уравнение (6.6)) } d^3 \vec{X} d^3 \vec{V} : \quad (6.8)$$

$$- \langle V_i^2 \rangle \frac{\Gamma \sqrt{\theta_i}}{b_i} + \frac{1}{m} \left\langle X_i \frac{\partial U(Xb_x, Yb_y, Zb_z)}{\partial X_i} \right\rangle \frac{\Gamma}{b_i \sqrt{\theta_i}} + \langle X_i^2 \rangle \frac{\Gamma \ddot{b}_i}{\sqrt{\theta_i}} = 0. \quad (6.9)$$

Угловыми скобками здесь обозначено усреднение по равновесному распределению f_0 :

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{N} \int \dots f_0(\vec{X}, \vec{V}) d^3 \vec{X} d^3 \vec{V}. \quad (6.10)$$

Правая часть уравнения (6.9) равна 0, так как интеграл столкновений не меняет скорость потока [176]:

$$\int I_{\text{ст.}}[f] V_i d^3 \vec{V} = 0. \quad (6.11)$$

Величина $\langle V_i^2 \rangle$ может быть найдена путём вычисления того же момента, $X_i V_i$, от кинетического уравнения на стационарное распределение f_0 :

$$- \langle V_i^2 \rangle + \frac{1}{m} \left\langle X_i \frac{\partial U_{\text{стац.}}(\vec{X})}{\partial X_i} \right\rangle = 0. \quad (6.12)$$

Символом $U_{\text{стац.}}$ обозначена энергия U в стационарном состоянии. Подставляя $\langle V_i^2 \rangle$ в уравнение (6.9), получим первые 3 из 6 уравнений на $b_i(t)$, $\theta_i(t)$:

$$\ddot{b}_i + \frac{1}{b_i m \langle X_i^2 \rangle} \left(\left\langle X_i \frac{\partial U(Xb_x, Yb_y, Zb_z)}{\partial X_i} \right\rangle - \theta_i \left\langle X_i \frac{\partial U_{\text{стац.}}(\vec{X})}{\partial X_i} \right\rangle \right) = 0. \quad (6.13)$$

Оставшиеся 3 уравнения найдём, вычисляя моменты величин V_i^2 и 1. Для момента V_i^2 получим:

$$\dot{\Gamma}\langle V_i^2 \rangle + 3\Gamma\langle V_i^2 \rangle \left(\frac{\dot{b}_i}{b_i} + \frac{\dot{\theta}_i}{2\theta_i} \right) = \frac{1}{N} \int V_i^2 I_{\text{ст.}} d^3\vec{X} d^3\vec{V}. \quad (6.14)$$

Функция $\dot{\Gamma}$ может быть выражена через другие величины путём вычисления момента 1:

$$\dot{\Gamma} + \Gamma \left(\frac{\dot{b}_i}{b_i} + \frac{\dot{\theta}_i}{2\theta_i} \right) = 0. \quad (6.15)$$

Правую часть уравнения (6.14) вычислим, используя приближение (6.2) для интеграла столкновений. До этого не было необходимости конкретизировать вид $I_{\text{ст.}}[f]$. Распределение $f_{\text{л.р.}}$ должно давать то же среднее по фазовому объёму значение квадрата скорости \vec{v} , что и f . Следовательно,

$$f_{\text{л.р.}}(\vec{x}, \vec{v}, t) = \bar{\Gamma} f_0(\vec{X}, \vec{V}), \quad (6.16)$$

где

$$\bar{V}_i \equiv \frac{v_i - \dot{b}_i X_i}{\sqrt{\bar{\theta}}}, \quad \bar{\theta} \equiv \frac{\theta_x + \theta_y + \theta_z}{3}, \quad \bar{\Gamma} \equiv \frac{1}{b_x b_y b_z \bar{\theta}^{3/2}}. \quad (6.17)$$

Таким образом,

$$\int V_i^2 f_{\text{л.р.}} d^3\vec{V} d^3\vec{X} = \Gamma \frac{\bar{\theta}}{\theta_i} \langle V_i^2 \rangle N. \quad (6.18)$$

Собирая вместе уравнения (6.2), (6.14), (6.15), (6.18), получим ещё 3 уравнения на b_i , θ_i :

$$\dot{\theta}_i + 2\theta_i \frac{\dot{b}_i}{b_i} = (\bar{\theta} - \theta_i) \nu_{\text{ст.}}. \quad (6.19)$$

Уравнения (6.13) и (6.19) являются полной системой для неизвестных функций b_i , θ_i . В последующем из этих уравнений найдём частоту поперечной дышащей моды и декремент затухания для различных частот столкновений $\nu_{\text{ст.}}$. Для анализа уравнений (6.13) необходимо иметь некоторое представление о потенциале среднего поля. Предположим, что

$$U_{\text{ср.п.}} = \text{const} \cdot n^\gamma, \quad \gamma = \text{const}. \quad (6.20)$$

Это предположение выполняется точно как минимум для 3 различных систем:

- газ бозонов или фермионов, слабо взаимодействующих путём s -волновых столкновений. В этих двух случаях $U_{\text{ср.п.}} = 4\pi\hbar a n/m$, где a — длина s -волнового рассеяния. То есть $U_{\text{ср.п.}} \propto n$;
- газ фермионов при $T = 0$ со взаимодействием путём резонансных s -волновых столкновений. В этом случае $U_{\text{ср.п.}} = \beta \varepsilon_{\text{Ф}}$, где $\varepsilon_{\text{Ф}}(n) = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{2/3}$ — локальная энергия Ферми, а значение β задаётся выражением (5.4) или (5.6). Таким образом, $U_{\text{ср.п.}} \propto n^{2/3}$.

Система ферми-атомов или фешбаховских бозе-молекул при произвольном s -волновом взаимодействии также приближённо подчиняется политропному уравнению состояния [177].

В случае политропного уравнения для среднего поля (6.20) уравнение (6.13) принимает вид

$$\ddot{b}_i + \omega_i^2 b_i - \omega_{i,\text{стац.}}^2 \frac{\theta_i}{b_i} + \frac{1}{b_i m \langle X_i^2 \rangle} \left\langle X_i \frac{\partial U_{\text{ср.п.}}^{\text{стац.}}(\vec{X})}{\partial X_i} \right\rangle \left(\frac{1}{(b_x b_y b_z)^\gamma} - \theta_i \right) = 0. \quad (6.21)$$

При рассмотрении дышащей моды $U_{г.о.} = U_{г.о.}^{ст.}$ и, следовательно, $\omega_i = \omega_{i,ст.}$. При рассмотрении разлёта $U_{г.о.} = 0$ и $\omega_i = 0$. Для последующих рассуждений о роли среднего поля не принципиально, идёт ли речь о разлёте или о колебаниях.

Динамика системы независима от среднего поля при условии $\theta_i = 1/(b_x b_y b_z)^\gamma$, как это видно из уравнения (6.21). Из уравнений (6.19) можно найти, что для сильновзаимодействующего ферми-газа ($\gamma = 2/3$) это условие выполняется в двух случаях:

- для сферически-симметричной системы при любых $\nu_{ст.}$;
- для гидродинамической системы ($\nu_{ст.} = \infty$) независимо от наличия симметрии.

Последний случай особенно важен для исследуемой системы: при $T = 0$ среднее поле никак не проявляется в гидродинамике сильновзаимодействующего ферми-газа. Этот результат может быть тотчас же обобщен на изоэнтропийный поток при любой температуре. Действительно, энергию межчастичного взаимодействия в наиболее общем виде, допустимом для универсальной системы, можно записать как

$$U_{ср.п.} = \tilde{\beta} \left(\frac{T}{\varepsilon_\Phi} \right) \varepsilon_\Phi, \quad (6.22)$$

где $\tilde{\beta}$ — некая безразмерная функция, равная универсальной постоянной β при $T = 0$ и монотонно сходящаяся к 0 при росте T . Как показано в подразделе 5.3.1 на странице 98, при изоэнтропийном движении и деформации малого объёма ΔV с координатой \vec{x} выполняется условие $T(\vec{x})/\varepsilon_\Phi(\vec{x}) = \text{const}$ и, следовательно, среднее поле в произвольной момент времени имеет вид

$$\begin{aligned} U_{ср.п.}(\vec{x}, t) &= \tilde{\beta} \left(\frac{T_0}{\varepsilon_\Phi(n_0(\vec{X}))} \right) \varepsilon_\Phi(n(\vec{x}, t)) = \tilde{\beta} \left(\frac{T_0}{\varepsilon_\Phi(n_0(\vec{X}))} \right) \frac{(n_0(\vec{X}))^{2/3}}{(b_x b_y b_z)^{2/3}} = \\ &= \frac{U_{ср.п.}^{ст.}(\vec{X})}{(b_x b_y b_z)^{2/3}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

при любой начальной температуре T_0 . Это выражение позволяет привести кинетическое уравнение к виду (6.21) и заключить, что в гидродинамическом пределе изоэнтропийная динамика сильновзаимодействующего газа не зависит от среднего поля при $\forall T$. В том числе, динамика не зависит от величины $\tilde{\beta}(T/\varepsilon_\Phi)$. В последующей части раздела рассматривается спектр колебаний для среднего поля $U_{ср.п.} = \text{const} \cdot n^{2/3}$.

При поиске спектра для произвольной частоты столкновений $\nu_{ст.}$ по-прежнему остаётся открытым вопрос о величине параметра

$$\chi_i^2 \equiv \frac{1}{m \langle X_i^2 \rangle} \left\langle X_i \frac{\partial U_{ср.п.}^{ст.}(\vec{X})}{\partial X_i} \right\rangle, \quad (6.24)$$

который для случая политропного уравнения (6.20) может быть записан в виде

$$\chi_i^2 = -\omega_i^2 \frac{3/2}{1 + 1/\gamma} \frac{\langle U_{ср.п.}^{ст.}(\vec{X}) \rangle}{\langle U_{г.о.}^{ст.}(\vec{X}) \rangle}. \quad (6.25)$$

В идеале каждому значению $\nu_{ст.}$ должна быть сопоставлена величина $\chi_i^2(\nu_{ст.})$. Не имея модели, делающей это сопоставление, найдём спектр для двух случаев — при минимальном и максимальном значении χ_i^2 . Более точные модели дадут спектр между этими двумя пределами. Минимальное $\chi_i^2 = 0$ соответствует отсутствию среднего поля. Максимальная

величина χ_i^2 достигается при $T = 0$, то есть когда газ наиболее плотный, а взаимодействие максимально. При $T = 0$

$$U_{\text{ср.п.}}^{\text{стац.}} = -\beta \varepsilon_{\Phi}(n_0), \quad n_0 = \left(\frac{\mu}{C}\right)^{3/2} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{R_i^2}\right)^{3/2}, \quad (6.26)$$

где $\mu = \sqrt{1 + \beta} \hbar (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} (6N)^{1/3}$ — глобальный химический потенциал, $C \equiv (1 + \beta) \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2)^{2/3}$, $R_i = \sqrt{2\mu/m\omega_i^2}$ — радиус Томаса–Ферми. Таким образом можно найти максимальное значение параметра χ_i^2 :

$$\max \chi_i^2 = -\frac{\beta}{1 + \beta} \omega_i^2 \approx 1,30 \omega_i^2, \quad (6.27)$$

где использовано значение $\beta = -0,565$ из подраздела 5.2.2 на странице 95.

Найдём частоту дышащей моды, линеаризовав уравнения (6.21) и (6.19) для

$$b_i = 1 + e_i, \quad \theta_i = 1 + \phi_i \quad (|e_i|, |\phi_i| \ll 1). \quad (6.28)$$

Получим уравнения на колебания малых величин:

$$\ddot{e}_i + (2\omega_i^2 - \gamma \chi_i^2) e_i - (e_j + e_k) \gamma \chi_i^2 - (\omega_i^2 + \chi_i^2) \phi_i = 0, \quad j \neq i, \quad k \neq i, j; \quad (6.29)$$

$$\dot{\phi}_i + 2\dot{e}_i = (\bar{\phi} - \phi_i) \nu_{\text{ст.}}. \quad (6.30)$$

Найдём спектр поперечной дышащей моды для цилиндрически-симметричного облака ($\omega_x = \omega_y \equiv \omega_{\perp}$), вытянутого вдоль направления z ($\omega_z \ll \omega_{\perp}$). Для сильновзаимодействующего ферми-газа ($\gamma = 2/3$), рассматривая гармонические процессы, получим уравнение на собственную комплексную частоту $\tilde{\omega}$:

$$\left(\tilde{\omega}^2 - \frac{10}{3} \omega_{\perp}^2\right) \nu_{\text{ст.}} - \left(\tilde{\omega}^2 - 4\omega_{\perp}^2 - \frac{2}{3} \chi_{\perp}^2\right) i \tilde{\omega} = 0. \quad (6.31)$$

Мнимая часть $\tilde{\omega}$ является декрементом, а действительная — собственно, частотой:

$$\tilde{\omega} \equiv \omega - \frac{i}{\tau}. \quad (6.32)$$

Не учтено отличие ω_z от нуля, так как это дало бы поправки к $\omega = \text{Re} \tilde{\omega}$ лишь порядка $\omega_z^2/\omega_{\perp}^2$, что для экспериментальных условий $\omega_z/\omega_{\perp} = 0,045$ неразрешимо в измерении.

На рисунке 6.2а показаны частота и декремент поперечной дышащей моды ферми-газа для различных значений частоты столкновений $\nu_{\text{ст.}}$. Частота и декремент нормированы на поперечную частоту ω_{\perp} . Одна кривая отвечает случаю без среднего поля ($\chi_{\perp}^2 = 0$), а другая — случаю с максимальным средним полем ($\chi_{\perp}^2 = -\omega_{\perp}^2 \beta / (1 + \beta) = 1,30 \omega_{\perp}^2$). Значения для промежуточных величин среднего поля лежат между этими двумя кривыми. Вдоль кривых частота столкновения убывает при движении снизу вверх.

Можно видеть, что в гидродинамическом случае ($\nu_{\text{ст.}} = \infty$), затухание отсутствует, а частота не зависит от параметра среднего поля χ_{\perp}^2 и равна

$$\omega_{\text{г/д}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \omega_{\perp} \approx 1,83 \omega_{\perp}. \quad (6.33)$$

При уменьшении числа столкновений частота растёт, а декремент затухания сначала растёт, а затем снова падает до нуля. При $\nu_{\text{ст.}} = 0$ мы получаем бесстолкновительный газ, в котором эффект среднего поля уже проявляется в частоте колебаний в отличие от

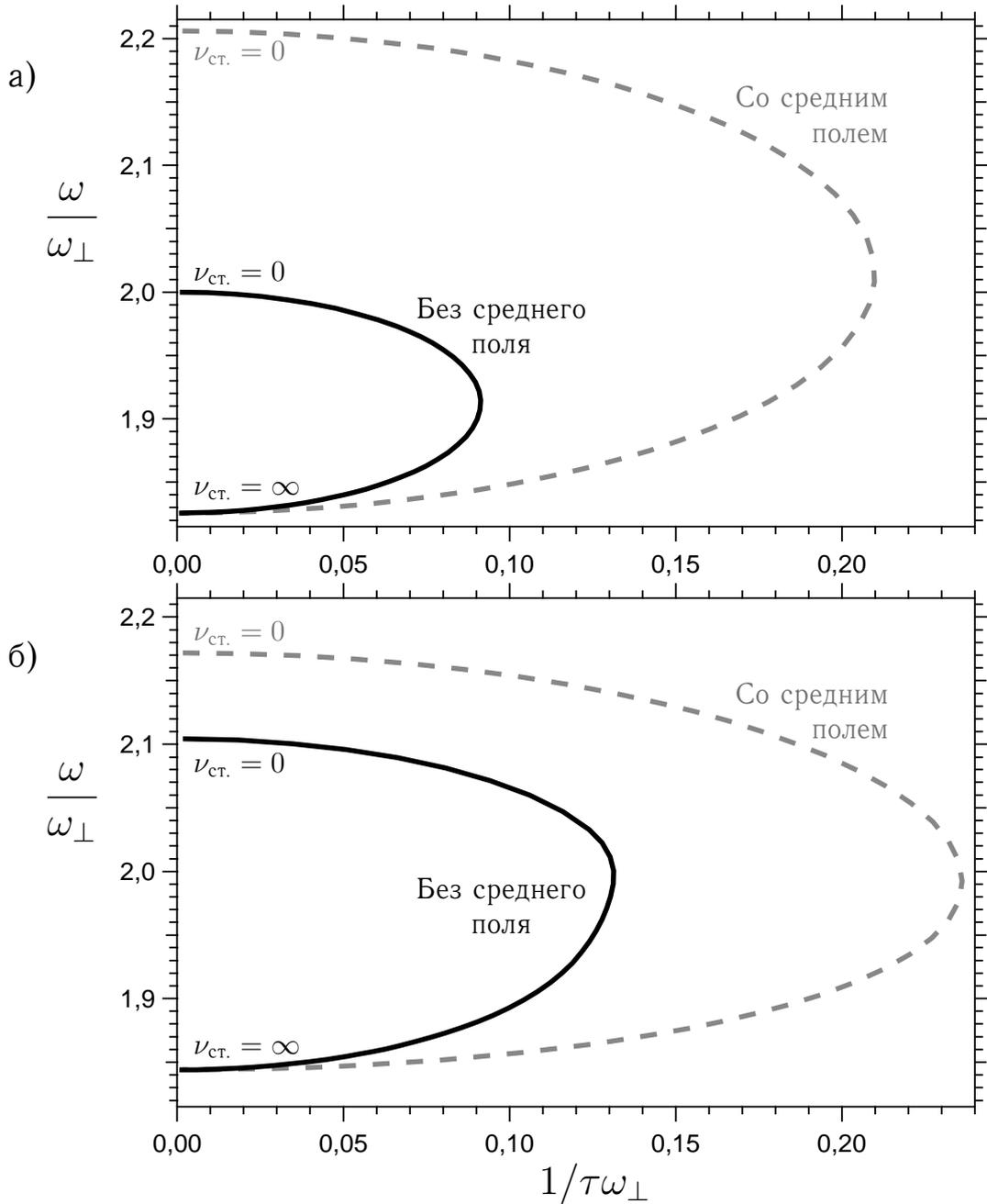


Рисунок 6.2 — Нормированная частота и декремент поперечной дышащей моды в веретенообразном потенциале для различных значений частоты столкновений $\nu_{ст.}$. Сплошная — без среднего поля. Штриховая — с максимальным средним полем. При движении вдоль кривых снизу вверх $\nu_{ст.}$ монотонно убывает. а) При $\omega_x = \omega_y$ и $\omega_z = 0$. б) Для потенциала, использовавшегося в эксперименте: $\omega_x/\omega_y = 1,107$, $\omega_z \approx 0$.

гидродинамического предела. Для случая бозе-газа ($\gamma = 1$) в бесстолкновительном случае ситуация противоположна — в длинном веретенообразном облаке частота не зависит от среднего поля и равна $2\omega_{\perp}$. Стоит отметить, что для цилиндрически симметричной системы рассмотрены колебания e_x и e_y в фазе, то есть $e_x = e_y$. Решение для колебаний в противофазе, то есть квадрупольной моды $e_x = -e_y$, здесь не приведено.

В эксперименте по поиску сверхтекучести, описанному в следующем разделе 6.3, гармонический потенциал несколько отличается от цилиндрически симметричного. Вдоль направления x удержание немного плотнее, чем вдоль y , поскольку $\omega_x/\omega_y = 1,107$. Асимметрия вносит изменения в собственные значения частоты и декремента. Значения, рас-

считанные с учётом асимметрии, показаны на рисунке 6.2б. В гидродинамическом пределе частота по-прежнему не зависит от среднего поля и равна чуть большему значению, чем для цилиндрически симметричной ловушки:

$$\omega_{г/д} \approx 1,84 \omega_{\perp}. \quad (6.34)$$

В пределе без среднего поля на рисунке 6.2б приведена ветвь, соответствующая колебаниям вдоль x . Эта ветвь в бесстолкновительном пределе даёт частоту $\omega = 2\omega_x \approx 2,10\omega_{\perp}$. Колебания вдоль y в рассматриваемых экспериментах ненаблюдаемы, поскольку происходят вдоль луча зрения. Ветвь колебаний вдоль y даёт другой бесстолкновительный предел $\omega = 2\omega_y$, что вполне естественно — без среднего поля колебания вдоль x и y независимы друг от друга.

6.3 Вывод о сверхтекучести атомного ферми-газа с резонансными взаимодействиями

Вернёмся к вопросу о существовании сверхтекучей фазы при низких температурах в сильновзаимодействующем ферми-газе. Вывод о существовании сверхтекучей фазы может быть сделан на основании измерения частоты и декремента дышащей моды газа в веретенообразном потенциале. Результаты измерений при различных температурах представлены на рисунке 6.3. В измерениях варьировалась только температура, а все остальные параметры почти идентичны для всех точек. Измерение температуры происходит по эмпирической температурной шкале $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$, описанной в подразделе 3.5.3 на странице 72. Там же изложены принципы пересчёта $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ в термодинамическую температуру T/E_{Φ} . Вне зависимости от теоретической модели при $T/E_{\Phi} \gtrsim 1$ пересчёт сводится к формуле (3.16), что даёт на графиках 6.3 наивысшую температуру $T/E_{\Phi} = 1,10$ или $1,02$ для значений β (5.4) или (5.6) соответственно.

В каждом повторении эксперимента газ ферми-атомов лития-6 приготавливается в двух равнонаселённых спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$, по $N = 100\,000 \pm 10\,000$ атомов в каждом. Внешний потенциал представляет собой веретенообразную ловушку глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10 \text{ Гц})$, $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 71 \pm 3$ Гц. Потенциал близок к параболическому, поскольку $E_{\Phi} = 2,4$ мкК $\ll U_0$ и $T \ll U_0$. Газ находится в режиме сильного взаимодействия благодаря внешнему магнитному полю $B = 840$ Гс, величина которого близка к s -волновому резонансу Фешаха при 834 Гс, что даёт параметр взаимодействия $k_{\Phi}a = -30$. Во всех случаях газ охлаждается до наименьшей достижимой относительной температуры. Затем температура повышается до различных значений путём контролируемого ввода энергии, описанного в разделе 3.6 на странице 76. После достижения термодинамического равновесия возбуждается поперечная дышащая мода, измеряется её частота и декремент, как описано в разделе 3.3 на странице 67. Для возбуждения колебаний ловушка быстро выключается, а затем, спустя $t_{\text{выкл.}} = 25$ мкс, резко восстанавливается. Процесс возбуждения вводит в газ небольшое количество энергии, которым, однако, можно пренебречь, поскольку величина введённой энергии в расчёте на один атом составляет $0,012 E_{\Phi}$, что можно вычислить, как описано в разделе 3.6 на странице 76.

Для поиска сверхтекучей фазы наиболее интересна область температур $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} = 0-0,53$. На графике 6.3б видно, что в этой области декремент монотонно возрастает, а частота моды совпадает со значением, предсказанным гидродинамическими теориями, и весьма далека от значения $\omega = 2,10\omega_{\perp}$, предсказанного для бесстолкновительного газа. Рассмотрим возможные варианты объяснения данных:

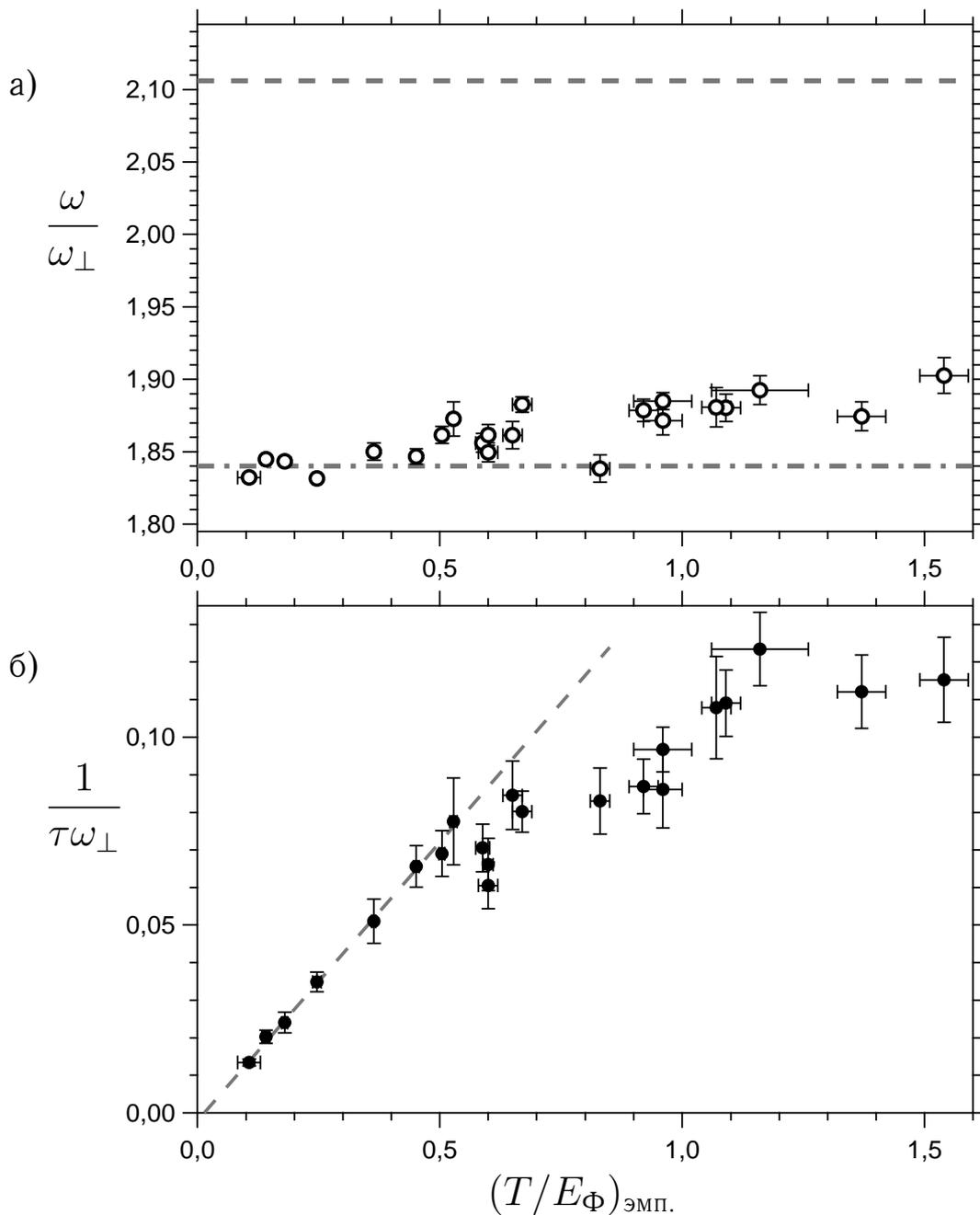


Рисунок 6.3 — Частота (а) и декремент (б) поперечной дышащей моды сильновзаимодействующего ферми-газа в зависимости от эмпирической температуры $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$. Частота ω и декремент $1/\tau$ нормированы на поперечную частоту ловушки ω_{\perp} . На графике (а) штрих-пунктиром и штрихом показано значение частоты в гидродинамическом пределе и пределе идеального газа соответственно. На графике (б) штрихом показана подгоночная прямая (6.35).

- при температуре меньше некоторой, часть атомов находятся в сверхтекучей фазе;
- система является нормальной.

Наблюдаемое поведение согласуется с предположением о существовании сверхтекучей фазы при $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} < 0,53$. Сверхтекучий газ представляет собой жидкость, что согласуется с наблюдаемой частотой. Кроме того, с понижением температуры должна расти сверхтекучая фракция, что уменьшает декремент. При нулевой температуре вся жидкость должна перейти в сверхтекучую фазу, что приводит к обращению декремента

в 0. Падение декремента с температурой также совпадает с наблюдениями. Более того, в области $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} < 0,53$ точки лежат близко к прямой, которая почти проходит через начало координат:

$$\frac{1}{\tau\omega_{\perp}} = (0,146 \pm 0,004) \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} - (0,0015 \pm 0,0014). \quad (6.35)$$

Установим, можно ли объяснить эти же данные без сверхтекучести. Единственной альтернативной моделью является нормальный газ со столкновениями и, возможно, среднем полем. Сначала посмотрим на эту систему качественно. Газ становится жидкостью при большой частоте столкновений, $\nu_{\text{ст.}} \rightarrow \infty$. При малых температурах частые столкновения невозможны из-за принципа запрета Паули. Действительно, при $T \ll \varepsilon_{\Phi}$ большинство конечных состояний рассеяния уже заняты, и, следовательно, рассеяние в них невозможно. Поэтому, при $T \rightarrow 0$ нормальный газ переходит в бесстолкновительный режим, что должно проявляться в частоте дышащей моды большей, чем $\omega_{\Gamma/\text{д.}}$. В эксперименте, однако, при $\forall T$ частота остаётся гидродинамической.

Рассмотрим поведение нормального газа и жидкости более количественно, опираясь на модель, построенную в предыдущем разделе 6.2 и основанную на кинетическом уравнении Больцмана–Власова. Модель позволяет найти зависимость частоты и декремента моды от частоты столкновений $\nu_{\text{ст.}}$. Результаты моделирования, показанные на графиках 6.2, не зависят от температуры в явном виде. Вместо температуры параметром модели служит $\nu_{\text{ст.}}$. Для того, чтобы сделать температуру явным параметром вместо $\nu_{\text{ст.}}$, воспользуемся зависимостью $\nu_{\text{ст.}}(T/E_{\Phi})$, рассчитанной в работе [178] и показанной на рисунке 6.4. При $T \rightarrow 0$ частота столкновений стремится к 0 в соответствии с общими рассужде-

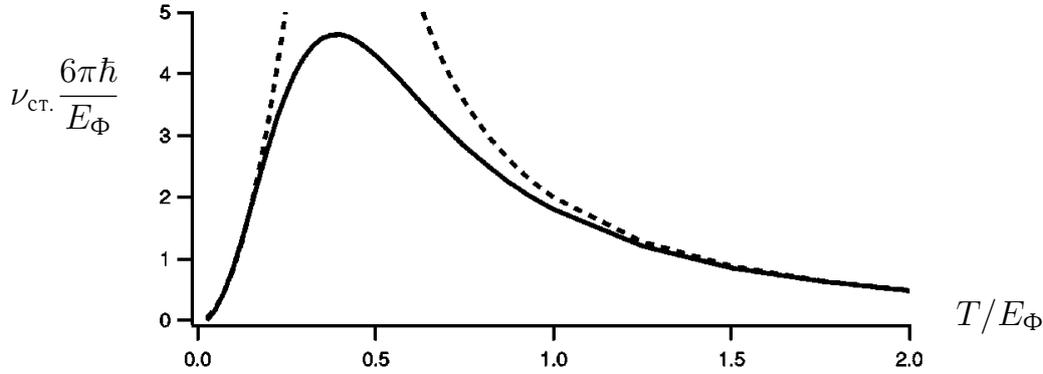


Рисунок 6.4 — Нормированная частота соударений в зависимости от T/E_{Φ} (сплошная линия). Из работы [178]. Обозначения осей приведены к используемым в диссертации.

ниями о прекращении рассеяния из-за запрета Паули. Подставив $\nu_{\text{ст.}}(T/E_{\Phi})$ в модель газа со столкновениями, найдём зависимости $\omega(T/E_{\Phi})$ и $1/\tau(T/E_{\Phi})$. Результаты моделирования показаны на рисунке 6.5. Моделирование проведено для соотношения частот $\omega_x/\omega_y = 1,107$, использованного в эксперименте. Графики 6.5а и 6.5б представляют собой развёрнутую версию графика 6.2б. Пары значений $(\omega/\omega_{\perp}, 1/\tau\omega_{\perp})$, взятые с графиков 6.5 при одинаковых температурах, ложатся на сплошную кривую графика 6.2б. Сравним результат моделирования с экспериментом.

В эксперименте наблюдается монотонный рост декремента из 0 при увеличении температуры (график 6.3б). Теория нормального газа, действительно, может воспроизвести этот рост, что видно на графике 6.5б. Однако в области монотонно возрастающего декремента $1/\tau(T)$ модель предсказывает очевидный уход частоты с гидродинамического предела (график 6.5а), что противоречит эксперименту — наблюдаемая частота с высокой

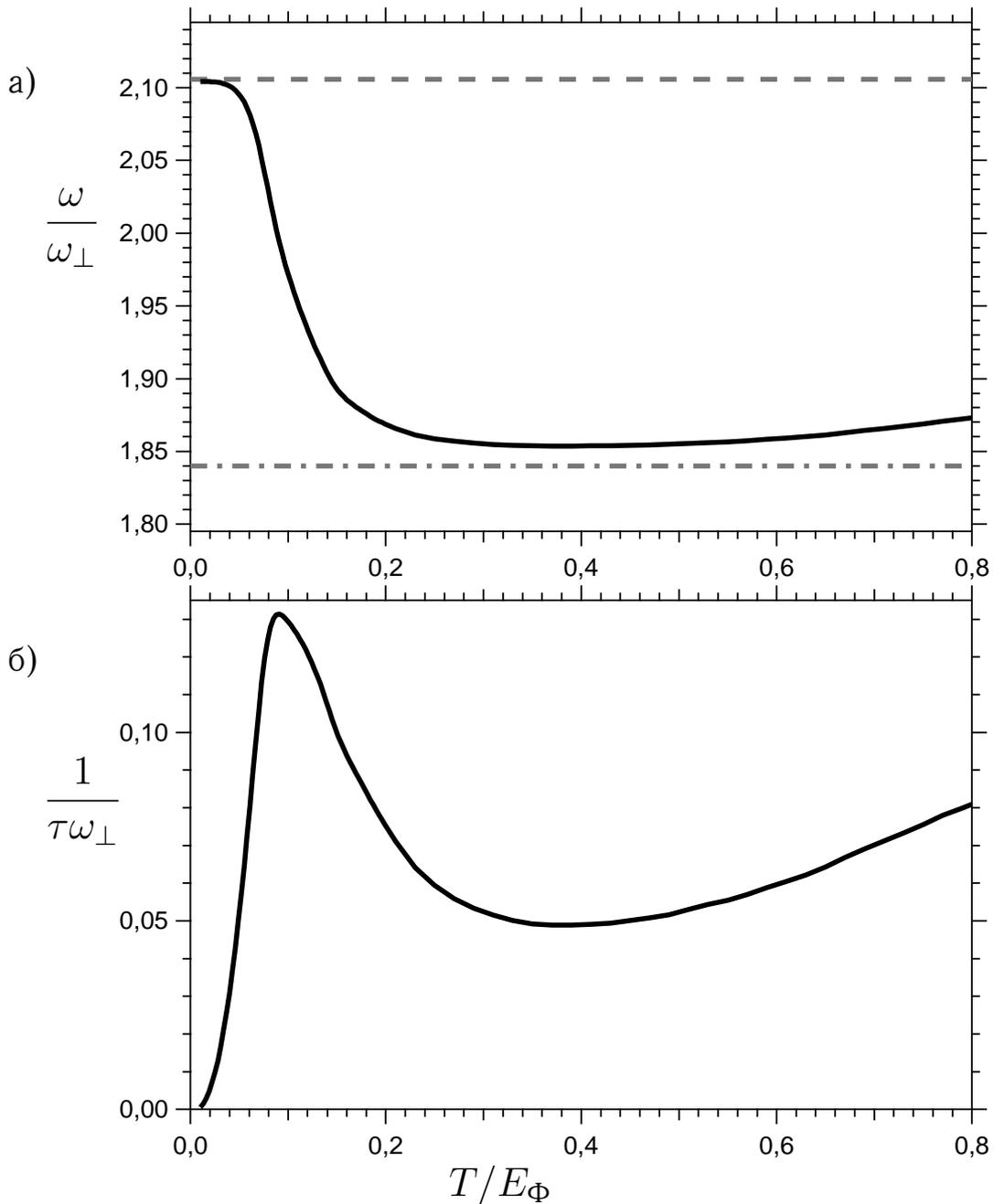


Рисунок 6.5 — Нормированная частота (а) и декремент (б) дышащей моды в модели нормального газа со столкновениями. Моделирование проводилось для случая нулевого среднего поля ($\chi_i^2 = 0$). На графике (а) штрих-пунктиром прямой показан гидродинамический, а штрихами — бесстолкновительный предел частоты.

точностью совпадает с гидродинамическим пределом (график 6.3а). Более того, в нормальной модели, в области монотонного роста $1/\tau(T)$ частота в основном лежит вблизи бесстолкновительного предела.

Модель нормального газа/жидкости, таким образом, входит в противоречие с наблюдаемыми данными. Единственным объяснением данных остаётся наличие сверхтекучей фазы во всей области монотонного роста декремента или части этой области.

Нормальная модель не является точной — это обсуждается в разделе 6.2. Зависимость $\nu_{\text{ст.}}(T/E_{\Phi})$ тоже приближённая. Приближения модели, тем не менее, не мешают увидеть, что предположение об несверхтекучем характере системы противоречит данным о частоте и декременте дышащей моды, представленным на графиках 6.3. Противоречие основано

на качественном изменении частоты, которое происходит в модели в области монотонного роста декремента $1/\tau(T)$ ($T < 0,12 E_F$). Ввиду приближённого характера модели нет необходимости приведения данных и модели к общей шкале температур. Для данных использована эмпирическая шкала температур $(T/E_F)_{\text{эмп.}}$. А для модели — термодинамическая шкала T/E_F . Эти две шкалы отличаются на множитель ~ 1 , что обсуждается в подразделе 3.5.3 на странице 72 и в последующем разделе 6.4, посвящённом точке фазового перехода.

Впервые измерения над дышащей модой сильновоздействующего ферми-газа выполнены автором диссертации и коллегами [6]. Эти измерения показали, что свойства моды не совместимы со свойствами нормальной системы в области наименьших исследованных температур и, в тоже время, согласуются с наличием сверхтекучей фазы. Эти измерения стали первым прямым и однозначным свидетельством сверхтекучести ферми-газа с сильными s -волновыми взаимодействиями. Позднее той же научной группой был произведено более подробное измерение свойств дышащей моды. Результаты этих измерений приведены в данном разделе и опубликованы в работе [7].

6.4 Критическая температура и энергия сверхтекучего перехода при резонансном взаимодействии

Этот раздел посвящён измерению температуры и энергии фазового перехода в сильновоздействующем ферми-газе атомов. Исторически, первым было измерение по термодинамическим характеристикам, представленное в главе 7 и опубликованное автором диссертации и коллегами в работе [97]. За ним последовало измерение, описываемое в этом разделе и опубликованное в работах [7, 179].

В предыдущем разделе 6.3 показано, что сверхтекучая фаза существует во всей области монотонного роста декремента или существенной части этой области. Встаёт вопрос об идентификации точки фазового перехода. На графике 6.3б видно, что в окрестности $(T/E_F)_{\text{эмп.}} = 0,53$ происходит качественное изменение зависимости декремента от температуры. Ниже этой точки данные ложатся на прямую (6.35), выходящую из 0. При $(T/E_F)_{\text{эмп.}} \approx 0,6$ виден провал декремента, а ещё выше, на отрезке $(T/E_F)_{\text{эмп.}} = 0,65-1,0$, декремент остаётся почти неизменным.

Вообще говоря, фазовый переход к сверхтекучести или сверхпроводимости относится ко второму роду [180]. В однородной среде при фазовом переходе второго рода термодинамические функции состояния (энергия, энтропия и другие) остаются непрерывными, а их производные по температуре испытывают скачок, который может служить для идентификации перехода. Интерпретация свойств дышащей моды более сложна. Во-первых, система не является однородной — при понижении температуры сверхтекучая фаза сначала образуется в центральной, наиболее плотной части облака, а при дальнейшем охлаждении распространяется к краям. Во-вторых, отсутствует модель поведения декремента вблизи фазового перехода. Поэтому непонятно, как фазовый переход должен проявлять себя в температурной зависимости декремента.

В этих условиях разумно воспользоваться общими соображениями о том, что наиболее существенные изменения в равновесных системах связаны с фазовыми переходами. Кроме того, известно, что в изучаемой системе фазовый переход есть. Поэтому качественное изменение в поведении декремента, происходящее при $(T/E_F)_{\text{эмп.}} = 0,53$ разумно связать с фазовым переходом в системе, то есть образованием сверхтекучей фазы в центральной, наиболее плотной части облака.

Фазовый переход не проявляет себя в частоте колебаний. Это неудивительно, поскольку гидродинамические уравнения сверхтекучей жидкости идентичны уравнениям

нормальной жидкости в случае изоэнтропийного невязкого движения (подраздел 5.3.2 на странице 99).

Предполагаемая критическая точка фазового перехода, таким образом, определена в единицах эмпирической температуры:

$$\left(\frac{T}{E_{\Phi}}\right)_{\text{эмп., кр.}} = 0,53 \pm 0,01. \quad (6.36)$$

Доверительный интервал включает в себя только статистический разброс значений и не включает возможные (неизвестные) систематические ошибки, связанные с методом определения критической температуры.

Охарактеризуем фазовый переход при помощи термодинамических переменных, определение которых не зависит от метода измерения. В качестве соответствующих характеристик может выступать температура $T_{\text{кр.}}$ и энергия газа, в среднем приходящаяся на одну частицу, $E_{\text{кр.}}$. В эксперименте, перед тем как возбудить дышащую моду, газ приготавливается при известной энергии, как описано в разделе 3.6 на странице 76. В точке, интерпретируемой как критическая, при $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} = 0,53$, газ приготовлен с энергией

$$E_{\text{кр.}} = (1,01 \pm 0,01) E_{\Phi} \quad (6.37)$$

в расчёте на каждую частицу газа. Это значение энергии является характеристикой фазового перехода, которая не зависит от метода измерения температуры или энергии.

Температура $T_{\text{кр.}}$ может быть установлена путём калибровки эмпирического термометра, что обсуждается в подразделе 3.5.3 на странице 72. Для достаточно больших температур калибровка не зависит от модели микросостояния и даётся формулой

$$\frac{T}{E_{\Phi}} = \left(\frac{T}{E_{\Phi}}\right)_{\text{эмп.}} \sqrt{1 + \beta}. \quad (6.38)$$

На основании модели, обсуждаемой там же, можно предположить, что эта формула достаточно точна в области $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} > 0,4$. Таким образом, пользуясь модельно-независимой калибровкой (6.38) можно найти критическую температуру

$$T_{\text{кр.}} = (0,35 \pm 0,01) E_{\Phi}, \quad (6.39)$$

где было использовано наиболее точное значение $\beta = -0,565 \pm 0,015$, найденное как описано в подразделе 5.2.2.

Зная критическую энергию $E_{\text{кр.}} = 1,01 E_{\Phi}$, можно найти критическую температуру $T_{\text{кр.}}$, пользуясь определением $T = \partial E / \partial S$ и измерениями $E(S)$, сделанными в работе [69], которая появилась уже после того, как были получены изложенные выше результаты. Более подробно метод описан в подразделе 3.5.3 на странице 75. В результате получим значение критической температуры, которое лежит вблизи значения (6.39): $T_{\text{кр.}} = 0,33 E_{\Phi}$. В этом способе нахождения $T_{\text{кр.}}$ может присутствовать небольшая систематическая ошибка, связанная с выбором гладких кривых для параметризации данных $E(S)$.

Интересно оценить температуру фазового перехода в однородной системе $T_{\text{кр.}}/E_{\Phi}$, пользуясь значением (6.39), измеренным для системы в параболическом потенциале. Для этого оценим локальную энергию Ферми в центре облака при температуре перехода. Как и при построении эмпирической термометрии (подраздел 3.5.3 на странице 72), воспользуемся тем, что при всех температурах форма профиля плотности напоминает распределение Томаса–Ферми идеального газа. Подставляя значение $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ в формулы (3.13) и (3.14) можно оценить, что при температуре фазового перехода плотность в центре облака

составляет 47% от плотности при $T = 0$. Это позволяет оценить локальную энергию Ферми

$$\varepsilon_{\Phi}(\vec{x} = 0) = 0,47^{2/3} \varepsilon_{\Phi} \Big|_{T=0} = 0,61 \frac{E_{\Phi}}{\sqrt{1 + \beta}} \quad \text{при} \quad \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} = 0,53. \quad (6.40)$$

Выразив в формуле (6.39) E_{Φ} через ε_{Φ} , получим оценку критической температуры для однородной системы

$$T_{\text{кр.}}/\varepsilon_{\Phi} = 1,09 T_{\text{кр.}}/E_{\Phi} = 0,38. \quad (6.41)$$

Использовано значение $\beta = -0,565$ как наиболее точно измеренное (подраздел 5.2.2 на странице 95).

6.5 Исчезновение сверхтекучей фазы при уменьшении взаимодействия

В предыдущих разделах этой главы основное внимание было уделено сверхтекучему состоянию на резонансе Фешбаха, при максимально сильном взаимодействии. При уменьшении взаимодействия сверхтекучее состояние становится всё более хрупким по отношению к тепловым возбуждениям и механическим воздействиям. В этой главе продемонстрированы признаки разрушения сверхтекучего состояния при отходе от резонанса Фешбаха в фермиевскую сторону, то есть в область отрицательных a , спадающих по модулю. Для наблюдения эффекта снова используется поперечная дышащая мода в веретенообразном потенциале, измерения над которой проведены в широком диапазоне параметров на мосту БКШ–БЭК.

Сначала рассмотрим свойства моды при различных отстройках от резонанса Фешбаха в рамках простых моделей. В приближении $T = 0$ частота дышащей моды может быть найдена при произвольной отстройке. Используя уравнение Эйлера (5.16) и приближённое политропное уравнение состояния

$$P = \text{const } n^{\gamma+1}, \quad \text{где } \gamma = \text{const}, \quad (6.42)$$

аналогичное уравнению (6.20), можно рассчитать, что в цилиндрически симметричном облаке частота зависит лишь от показателя γ [181, 182]:

$$\omega = \sqrt{2(\gamma + 1)} \omega_{\perp}. \quad (6.43)$$

Частота, вычисленная в рамках модели точна в тех случаях, когда γ известна точно, то есть на резонансе, а также в бозевском и фермиевском пределе. В этих трёх случаях $\gamma = 2/3$, 1 и $2/3$ соответственно. При остальных значениях a политропное уравнение (6.42) является разумным приближением [181, 183]. В работах [181, 183] показатель политропы вычислен в приближении среднего поля [93, 94], что позволило найти частоту при произвольной отстройке от резонанса. Результат расчёта показан сплошной кривой на графике 6.6 и 6.7. Эти расчёты подобны расчётам химического потенциала на мосту БКШ–БЭК, приведённым в подразделе 2.7.3 на странице 51. Давление может быть найдено из химического потенциала при помощи соотношения Гиббса³⁾–Дюгема⁴⁾ $dP = n d\mu_{\text{лок.}}$. Точность модели возрастает при движении от резонанса в фермиевскую сторону, поскольку модель расчёта γ основана на состоянии БКШ (2.100), которое наиболее

³⁾Josiah Willard Gibbs, 1839–1903

⁴⁾Pierre Maurice Marie Duhem, 1861–1916

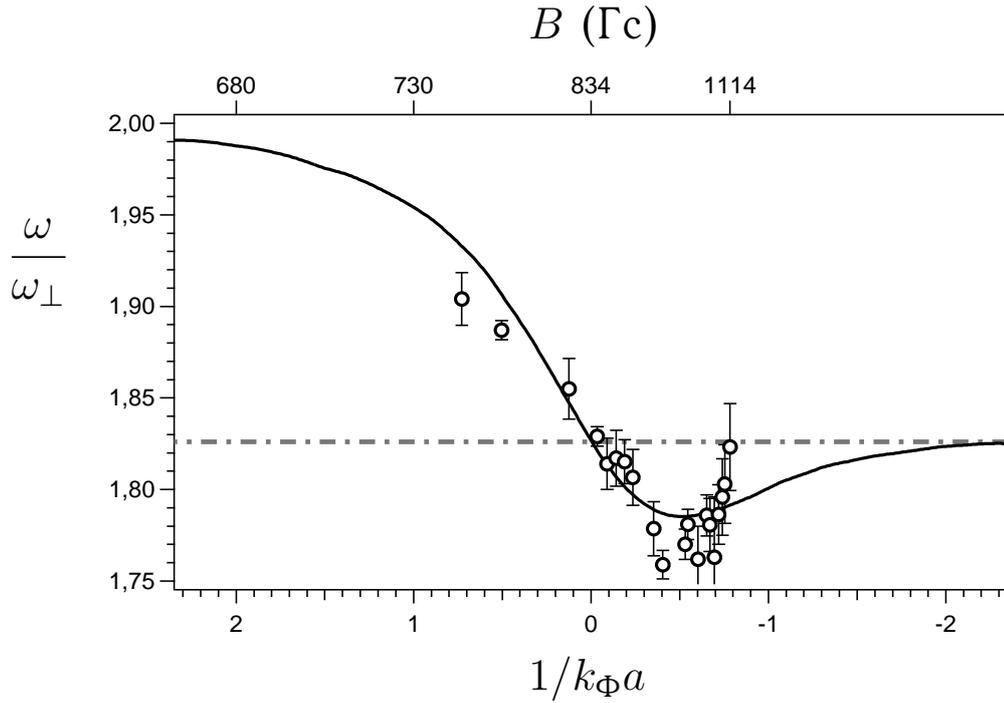


Рисунок 6.6 — Нормированная частота поперечной дышащей моды при разных отстройках от резонанса Фешбаха. Данные показаны кольцами, а моделирование в приближении среднего поля — сплошной линией. Штрих-пунктир — гидродинамическая частота на резонансе $\omega = \sqrt{10/3}\omega_{\perp}$. Отстройка отложена на нижней оси в единицах $1/k_{\Phi}a$, а соответствующее магнитное поле — на верхней оси с нелинейной шкалой.

точно в области слабого притяжения. На резонансе и в области бозе-эйнштейновской конденсации молекул теория среднего поля ошибается в общем коэффициенте в уравнении состояния (6.42), однако по-прежнему достаточно точно вычисляет показатель политропы γ . Все вычисления политропы и частоты моды сделаны в предположении, что система остаётся сверхтекучей при любой отстройке от резонанса.

Для того, чтобы увидеть разрушение сверхтекучего состояния, была измерена частота и декремент поперечной дышащей моды при различных отстройках от резонанса. Результаты измерений показаны на графиках 6.6 и 6.7. Величина отстройки выражена параметром $1/k_{\Phi}a$, отложенном на горизонтальной нижней оси, где $\hbar k_{\Phi} \equiv \sqrt{2E_{\Phi}m}$ — глобальный импульс Ферми идеального ферми-газа с тем же числом частиц и в гармоническом потенциале с теми же частотами, что и у исследуемого взаимодействующего газа. В эксперименте отстройка контролировалась при помощи внешнего магнитного поля B , величина которого показана на верхней горизонтальной оси. Шкала B сделана нелинейной для сохранения линейности шкалы $1/k_{\Phi}a$. Поле $B = 1114$ Гс было наибольшим доступным на момент проведения эксперимента. Центр резонанса $1/k_{\Phi}a = 0$ соответствует магнитному полю $B = 834$ Гс. Область $1/k_{\Phi}a \rightarrow -\infty$ соответствует фермиевской асимптоте резонанса, на которой газ должен подчиняться теориям со слабым взаимодействием, подобным теории Бардина–Купера–Шриффера. В области $1/k_{\Phi}a \rightarrow +\infty$ система представляет собой бозе-эйнштейновский конденсат молекул Li_2 .

В каждом повторении эксперимента газ ферми-атомов лития-6 готовится в двух равнонаселённых спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$, по $N = 100\,000 \pm 10\,000$ атомов в каждом. Внешний потенциал представляет собой веретенообразную ловушку глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_x = 2\pi \cdot (1600 \pm 10$ Гц), $\omega_y = 2\pi \cdot (1500 \pm 10$ Гц), $\omega_z/2\pi = 70 \pm 5$

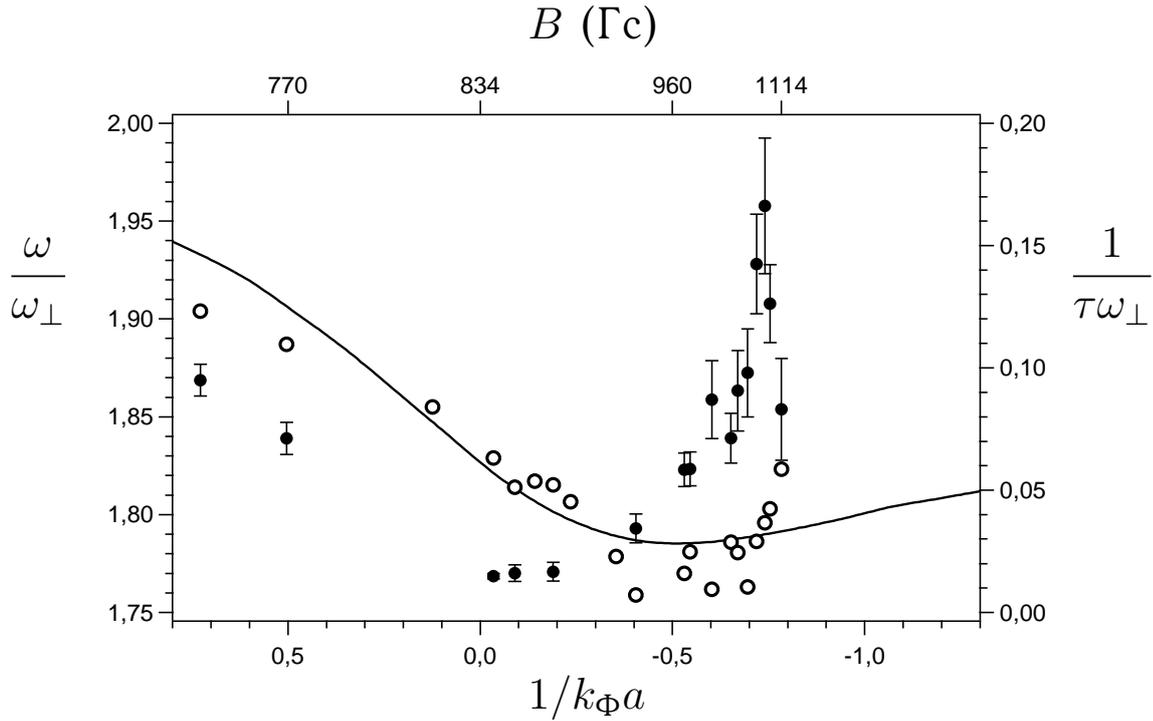


Рисунок 6.7 — Нормированный декремент и частота поперечной дышащей моды при разных отстройках от резонанса Фешбаха. Данные о декременте показаны кружками.

Для частоты приведены данные (кольца) и расчёты в приближении среднего поля (сплошная). Отстройка отложена на нижней оси в единицах $1/k_{\Phi}a$, а соответствующее магнитное поле — на верхней оси с нелинейной шкалой.

Гц. Во всех случаях газ охлаждается до наименьших достижимых температур, которые можно оценить как $T \approx 0,04 E_{\Phi}$. Внешний потенциал для газа близок к параболическому, поскольку $E_{\Phi} = 2,2 \text{ мкК} \ll U_0$ и $T \ll E_{\Phi}$. Возбуждение дышащей моды и измерение её частоты описано в разделе 3.3 на странице 67.

В большинстве экспериментов для возбуждения колебаний ловушка быстро выключается, а затем, спустя $t_{\text{выкл.}} = 25 \text{ мкс}$, резко восстанавливается. Процесс возбуждения вводит в газ небольшое количество энергии, которым, однако, можно пренебречь, поскольку величина введённой энергии в расчёте на один атом составляет $0,012 E_{\Phi}$, что можно вычислить по формуле (3.31). В некоторых повторениях продолжительность возбуждающего импульса составляла $t_{\text{выкл.}} = 50 \text{ мкс}$, что даёт чуть больший ввод энергии — $0,047 E_{\Phi}$ на частицу. Измерения декремента приведены только для случаев возбуждения импульсом в 25 мкс, а измерения частоты — для обоих вариантов.

Приведённые параметры потенциала справедливы для большинства экспериментов. В некоторых экспериментах из-за небольшого изменения мощности лазера, создающего дипольный веретенообразный потенциал, частоты чуть отличны. Эти изменения мощности отслеживаются путём регулярных замеров частоты поперечной дышащей моды идеального газа, равной $2\omega_x$. При изменении мощности все частоты масштабируются в соответствии с новым значением ω_x . Данные с чуть отличными параметрами ловушки можно рассматривать вместе с основной массой данных, поскольку на графиках частота и декремент моды нормированы на ω_{\perp} , а параметр взаимодействия выбран в виде безразмерной величины $1/k_{\Phi}a$.

Рассмотрим результаты измерений над дышащей модой, представленные на графиках 6.6 и 6.7. На резонансе частота совпадает с предсказанием гидродинамических теорий $\omega = \sqrt{10/3}\omega_{\perp}$, что также было показано выше, в подразделе 5.3.2 на странице 99 и разде-

ле 6.3. Декремент на резонансе достигает минимального значения. При уходе от резонанса в фермиевскую сторону $B > 834$ Гс, видно, что значения частоты систематически отходят от предсказаний простой гидродинамической модели. Сначала в области $0 > 1/k_{\Phi}a > -0,7$ частота лежит систематически ниже теоретической кривой, а в области $1/k_{\Phi}a < -0,7$ ($B > 1050$ Гс) происходит резкий рост частоты. Рост частоты сопровождается пиком декремента затухания при $1/k_{\Phi}a = -0,74$ ($B = 1080$ Гс).

Таким образом, в районе $1/k_{\Phi}a = -0,74$ ($B = 1080$ Гс) наблюдается резкий рост частоты и пиковое значение декремента затухания. Пик декремента много уже по магнитному полю, чем ширина резонанса Фешбаха, поэтому источником пиковых значений декремента не может быть процесс, связанный со средним полем или частотой межчастичных столкновений. Единственный процесс, который резко зависит от изменения B — это резонанс между колебаниями дышащей моды и энергией связи куперовских пар. Следовательно, пик затухания вблизи $B = 1080$ Гс скорее всего связан с разрушением куперовских пар фононами. Отсутствует возможность сравнения данных с точной моделью ввиду отсутствия таковой. Однако покажем, что гипотеза о разрушении куперовских пар колебаниями согласуется с простейшими оценками.

На резонансе Фешбаха существует сверхтекучая фаза, как показано в разделе 6.3. При уходе на фермиевскую сторону резонанса ($1/k_{\Phi}a < 0$, то есть $B > 834$ Гс) взаимодействие уменьшается, что приводит к сокращению сверхтекучей щели Δ . Условие разрыва пары фононом:

$$\hbar\omega = 2\Delta, \quad (6.44)$$

где ω — частота дышащей моды, которую для оценок примем равной гидродинамическому значению $\omega = \sqrt{10/3}\omega_{\perp} = 1,83\omega_{\perp}$. Для оценки щели воспользуемся формулой Горькова–Мелика-Бархударова [90] для щели при нулевой температуре:

$$\Delta_0 = \left(\frac{2}{e}\right)^{7/3} \varepsilon_{\Phi} e^{-\pi/2\kappa_{\Phi}|a|} = 0,49 \varepsilon_{\Phi} e^{-\pi/2\kappa_{\Phi}|a|}. \quad (6.45)$$

Формула рассчитана в пределе слабой связи ($\kappa_{\Phi}|a| \ll 1$). Однако на резонансе критическая температура найденная по этой формуле с помощью выражения $T_{кр.} = \Delta_0 e^{\gamma'}/\pi$, лежит вблизи значений, предлагаемых современными теориями сильнодействующих систем, что можно видеть из таблице 2.2 на странице 48. Оценим Δ_0 в точке максимального затухания $B = 1080$ Гс. При уходе от резонанса, разумеется, точность формулы (6.45) возрастает. Приняв, что в центре облака $\kappa_{\Phi}a \approx k_{\Phi}a = -0,74$, найдём для наиболее плотной части газа

$$\Delta_0 \approx 0,15 \varepsilon_{\Phi} \approx 0,15 E_{\Phi}. \quad (6.46)$$

Для сравнения $2\Delta_0$ с частотой моды, заметим, что $E_{\Phi} = \hbar\omega_{\perp} (6N \omega_z/\omega_{\perp})^{1/3}$. В рассматриваемом эксперименте $N \approx 10^5$, $\omega_z/\omega_{\perp} = 0,045$, что даёт в центре облака

$$2\Delta_0 = 9,2\omega_{\perp} = 5,0\omega, \quad (6.47)$$

то есть величины $2\Delta_0$ и ω не в резонансе друг с другом. Однако столь большое отношение $2\Delta_0/\omega$ не противоречит идее о разрыве куперовских пар фононами дышащей моды. Во-первых, отношение рассчитано при $T = 0$, а измерения выполнены при $T/E_{\Phi} \lesssim 0,1$. Фактически, $T \sim \Delta$ и, следовательно, щель Δ существенно меньше Δ_0 . Во-вторых, щель Δ_0 рассчитана в центре облака. В то же время, разрыв куперовских пар может происходить на некотором удалении от центра, где плотность меньше и, следовательно, локальная энергия Ферми ε_{Φ} и щель также меньше. Таким образом, при $B = 1080$ Гс в условиях эксперимента для существенной части облака может быть выполнено условие разрыва пар фононами $2\Delta = \hbar\omega$.

Непротиворечивое свидетельство разрыва куперовских пар в атомном газе впервые было обнаружено автором диссертации и коллегами и опубликовано в работе [184]. Систематические измерения свойств дышащей моды при различных магнитных полях вблизи резонанса Фешбаха приведены также в более ранней работе [185], выполненной в Университете Инсбрука. В этой работе впервые сообщалось о пике затухания на некотором расстоянии от резонанса и предполагалось, что пик связан с разрывом куперовских пар под действием дышащей моды. Однако предположение о разрыве куперовских пар в той работе противоречило данным о частоте дышащей моде — везде между пиком и резонансом Фешбаха частота существенно отличалась от гидродинамической, что противоречило существованию сверхтекучей фазы при сильных взаимодействиях. Как выяснилось теми же авторами позже [186], частота в работе [185] измерена с ошибками и истинная частота на резонансе совпадает с измерениями, приведёнными в этой диссертации. Таким образом, в этом разделе сообщено о впервые обнаруженном непротиворечивом свидетельстве разрушения куперовских пар под действием дышащей моды.

Глава 7

Термодинамика ферми-газов

7.1 Влияние статистики и фазовых переходов на термодинамические величины

Термодинамические свойства системы напрямую связаны со статистикой составляющих её частиц. В состоянии глубокого квантового вырождения ($T \ll E_{\Phi}$) бозе-газ имеет существенно меньшую теплоёмкость, чем ферми-газ. Для идеального газа из N одинаковых частиц в параболическом потенциале можно рассчитать зависимость энергии от температуры при $T \ll E_{\Phi}$:

$$E_{\text{полн.}} = N E_{\Phi} \frac{\pi^4}{5} \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^4 \quad - \quad \text{для бозонов,} \quad (7.1)$$

$$E_{\text{полн.}} = N E_{\Phi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^2 \right) \quad - \quad \text{для фермионов.} \quad (7.2)$$

В бозе-конденсате, таким образом, прирост энергии $E_{\text{полн.}} - E_{\text{осн.}} \propto T^4$, в то время как в идеальном ферми-газе $\propto T^2$. Для нагрева бозе-газа требуется существенно меньше энергии.

На этом примере видно, что в ферми-системе признаки бозонизации и наличия сверхтекучей фазы могут быть обнаружены путём измерения зависимости $E_{\text{полн.}}(T)$. Кроме того, излом в $E_{\text{полн.}}(T)$ или резкое изменение степенной зависимости является признаком фазового перехода. Например, критическая температура в гелии-4 была идентифицирована по скачку теплоёмкости [187], что соответствует излому $E_{\text{полн.}}(T)$. В отличие от однородной среды, для газа в ловушке излом $E_{\text{полн.}}(T)$ может быть менее выраженным, поскольку при снижении температуры сверхтекучая фаза появляется не во всём облаке сразу, а только в наиболее плотной центральной части.

В разделе 7.3 этой главы описано измерение зависимости энергии от температуры для сильновозмущаемого газа ферми-атомов. Степенная зависимость $E_{\text{полн.}}(T)$ с высоким показателем при $T < 0,27 E_{\Phi}$ стала признаком наличия сверхтекучей фазы в этой области, а излом при $T = 0,27 E_{\Phi}$ указывает на фазовый переход в этой точке. Результаты измерений сравниваются с моделью, которая была изначально разработана для высокотемпературных сверхпроводников, а затем адаптирована для атомного газа. Совпадение измерений с моделью позволило проверить в атомной системе одну из многочастичных теорий твёрдого тела. Перед тем, как привести результаты этих измерений, в разделе 7.2 экспериментальные методы апробируются на примере идеального ферми-газа.

7.2 Термодинамика идеального ферми-газа

Измерение термодинамических величин в идеальном ферми-газе позволяет проверить правильность экспериментальных методов, поскольку все величины могут быть вычислены [188]. В следующем разделе 7.3 эти методы использованы для изучения сильновзаимодействующего ферми-газа.

Результаты измерения $E_{\text{полн.}}(T)$ для идеального ферми-газа в веретенообразной ловушке показаны на рисунке 7.1 вместе с результатами моделирования. В эксперименте

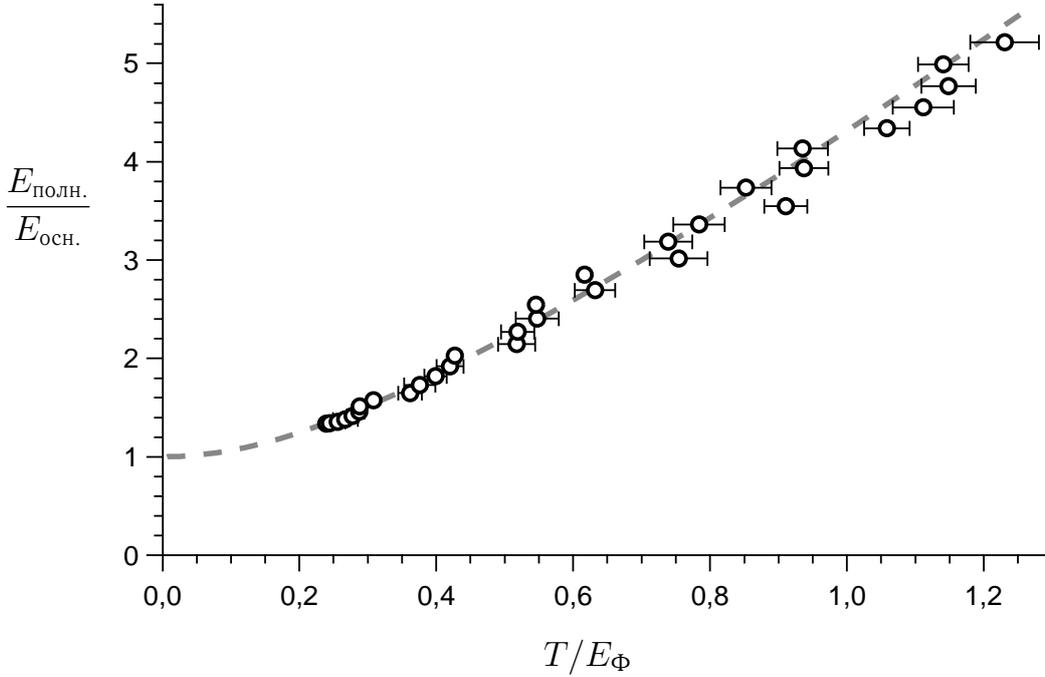


Рисунок 7.1 — Зависимость энергии идеального ферми-газа от температуры. Кольцами показаны данные, а кривой — расчёт по формулам (7.3), (7.4), (7.5). Энергия нормирована на энергию основного состояния $E_{\text{осн.}} \approx \frac{3}{4}NE_F$.

газ атомов лития-6 в состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$ приготавливается в магнитном поле 526 Гс, где длина s -волнового рассеяния обращается в ноль [84, 86]. Температура T/E_F варьируется от 0,24 до 1,23. Число атомов в каждом состоянии N одинаково и в разных повторениях эксперимента составляет $104\,000 \pm 10\,000$. Внешний потенциал представляет собой веретенообразную ловушку глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_{\perp} \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10$ Гц), $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 72 \pm 5$ Гц. Во всех повторениях газ сначала охлаждается до наименьшей достижимой температуры $T/E_F = 0,24$. Затем его энергия контролируемым образом повышается до известного значения $E_{\text{полн.}}$, как описано в разделе 3.6 на странице 76. После приведения газа в состояние термодинамического равновесия и переключения магнитного поля на 526 Гс температура измеряется по поперечному распределению плотности вдоль x подобно тому, как описано в подразделе 3.5.2 на странице 71. В измерениях использована видеосистема, разрешение которой 5,5 мкм сравнимо с поперечным размером газа в ловушке. Для того, чтобы избежать эффектов, связанных с конечным разрешением, облако фотографируется после почти мгновенного выключения потенциала и последующего разлёта в течение времени t . Фотография позволяет точно восстановить профиль газа в ловушке, поскольку расширение автомодельно. Коэффициент расширения в направлении x : $b_x = \sqrt{1 + \omega_x^2 t^2}$. Все измерения выполнены над одной спиновой компонентой в газе. Все расчёты также приведены для газа с одной спиновой компонентой, как будто другая отсутствует. Учёт только одного спина оправдан, поскольку в момент

измерения спиновые компоненты не взаимодействуют.

Потенциал ловушки $U(\vec{x})$ несколько отличается от гармонического (подраздел 2.4.2 на странице 28 и раздел 3.4 на странице 68). Однако влияние ангармонизма мало, поскольку энергия большинства частиц много меньше глубины потенциала, в частности $E_\Phi/U_0 \approx 0,07$. Малые поправки, связанные с ангармонизмом учтены при расчёте введённой энергии (приложение Б). Поправки наиболее существенны при наибольших температурах $T \sim E_\Phi$.

В идеальном ферми-газе зависимость $E_{\text{полн.}}(T)$ может быть вычислена интегрированием по числам заполнения:

$$E_{\text{полн.}} = \int \frac{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} + U(\vec{x})}{\exp\left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2mT} + \frac{U(\vec{x})}{T} - \frac{\mu(T)}{T}\right) + 1} \frac{d^3 \vec{x} d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (7.3)$$

Глобальный химический потенциал μ может быть найден из уравнения на число частиц

$$N = \int \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2mT} + \frac{U(\vec{x})}{T} - \frac{\mu(T)}{T}\right) + 1} \frac{d^3 \vec{x} d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (7.4)$$

В случае гармонического потенциала эти два выражения сводятся соответственно к (2.36) и (2.33), а при $T \ll E_\Phi$ дают формулу (7.2).

При расчёте теоретической зависимости для рисунка 7.1 использован гауссов потенциал

$$U(\vec{x}) = U_0 \left(1 - e^{-m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)/2U_0}\right), \quad (7.5)$$

достаточно точно воспроизводящий реальный потенциал, описанный в разделе 3.4 на странице 68 и подразделе 2.4.2 на странице 28. Как можно видеть, результаты измерений и расчётов совпадают, что подтверждает правильность экспериментальных методов.

Приведённые в этом разделе результаты опубликованы автором диссертации и коллегами в работе [97]. Зависимость энергии идеального ферми-газа атомов от температуры измерена впервые.

7.3 Зависимость энергии от температуры в сильно взаимодействующем ферми-газе

Термодинамические измерения над сильно взаимодействующим газом востребованы ввиду сложности построения теорий сильно взаимодействующих систем многих тел и противоречий между известными моделями. Эти противоречия видны на примере предсказаний критической температуры, сведённых в таблицу 2.2 на странице 48.

В этом разделе рассмотрена система, которая скорее всего является универсальной (глава 5) — смесь ферми-атомов в двух равнонаселённых спиновых состояниях, взаимодействующих посредством резонансных s -волновых столкновений. В эксперименте атомы лития-6 приготовлены в двух внутренних состояниях, $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Населённости состояний почти идентичны. Число атомов в каждом состоянии несколько варьируется от одного повторения эксперимента к другому и составляет $N = 110\,000 \pm 15\,000$. Сильные взаимодействия достигнуты путём включения внешнего магнитного поля $B = 840$ Гс, величина которого лежит вблизи s -волнового резонанса Фешбаха при 834 Гс, что даёт параметр взаимодействия $k_\Phi a = -30$. Газ приготовлен в веретенообразной ловушке глубиной $U_0 = 35$ мкК с частотами $\omega_\perp \equiv \sqrt{\omega_x \omega_y} = 2\pi \cdot (1696 \pm 10)$ Гц, $\omega_x/\omega_y = 1,107 \pm 0,004$, $\omega_z/2\pi = 72 \pm 5$ Гц. В каждом повторении эксперимента газ охлаждается до наименьшей достижимой температуры, а затем в него прецизионно добавляется энергия, как описано

в разделе 3.6 на странице 76. Небольшое отличие потенциала от гармонического учтено в малых поправках при расчёте введённой энергии (приложение Б). Поправки наиболее существенны при наибольших энергиях.

Таким образом, газ приготавливается при различных известных энергиях. Число частиц в газе также известно и почти неизменно в различных повторениях. Измерение ещё одного независимого термодинамического параметра позволило бы изучить термодинамические свойства системы. На роль такого параметра выберем температуру. Возможные пути измерения температуры сильно взаимодействующего ферми-газа обсуждаются в подразделе 3.5.3 на странице 72. На данный момент способ прямого измерения термодинамической температуры T неизвестен. Поэтому в эксперименте измеряется эмпирическая температура $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$, полученная путём наблюдения за профилем плотности. При наличии теоретической модели эмпирическая температура может быть пересчитана в T/E_{Φ} . Этот подход эквивалентен измерению температуры ртутным термометром — высота столбика ртути является аналогом $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ и пересчитывается в абсолютную шкалу T .

Сначала рассмотрим зависимость $E_{\text{полн.}}$ от эмпирической температуры $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$. Затем, после теоретической калибровки термометра, исследуем зависимость от термодинамической температуры $E_{\text{полн.}}(T)$. Ещё до калибровки термометра экспериментальные данные позволяют сделать несколько интересных выводов, в том числе, увидеть признаки фазового перехода.

На рисунке 7.2 точками показана измеренная зависимость энергии от $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$. Для

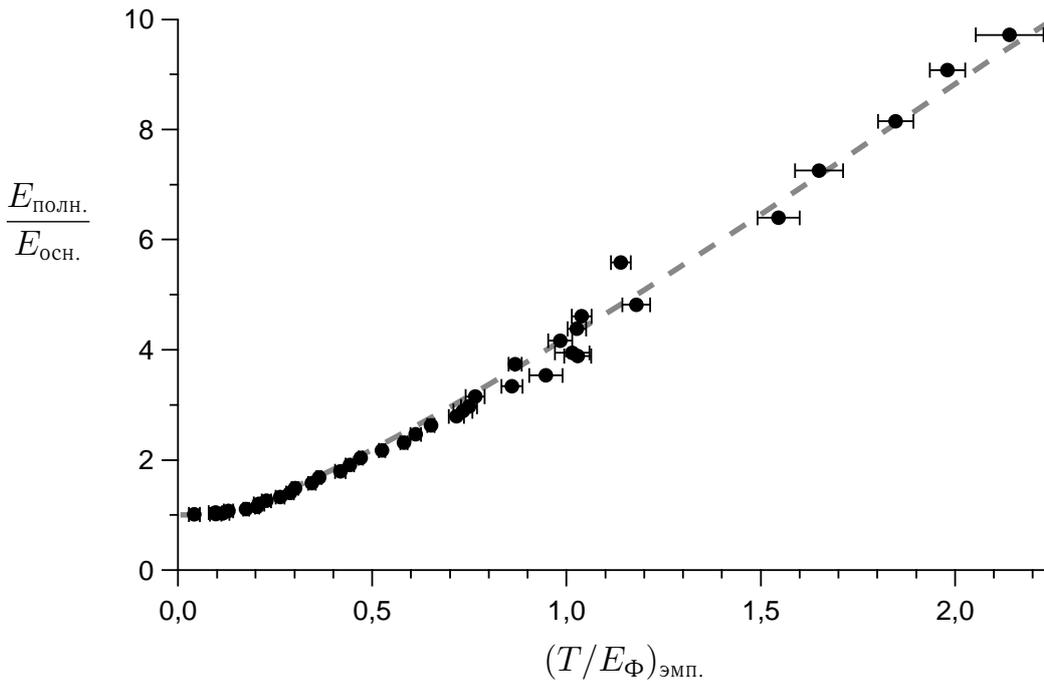


Рисунок 7.2 — Зависимость энергии сильно взаимодействующего ферми-газа от эмпирической температуры. Точками показаны данные. Энергия нормирована на энергию основного состояния. Кривая — расчёт для идеального газа по формулам (7.3), (7.4), (7.5).

сравнения линией показана зависимость для идеального газа. В обоих случаях полная энергия газа $E_{\text{полн.}}$ нормирована на энергию основного состояния. Для газа из двух спиновых компонент с резонансными взаимодействиями, помещённого в гармонический потенциал, энергия основного состояния

$$E_{\text{осн.}} = \frac{3}{4} 2N E_{\Phi} \sqrt{1 + \beta}, \quad (7.6)$$

как показано в подразделе 2.7.2 на странице 48. Для идеального спин-поляризованного газа (раздел 2.5 на странице 30)

$$E_{\text{осн.}} = \frac{3}{4} N E_{\text{Ф.}} \quad (7.7)$$

Можно видеть, что энергии основного состояния отличаются лишь на универсальный множитель $\sqrt{1 + \beta}$. Поскольку в эксперименте потенциал несколько отличается от гармонического, в расчёт энергии основного состояния были внесены соответствующие малые поправки.

Первым интересным результатом стало совпадение на большом масштабе между зависимостью для сильновзаимодействующего и идеального газа, которое видно на рисунке 7.2. Стоит отметить, что для этих двух систем эмпирическая температура $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}}$ имеет разный количественный смысл. Для идеального ферми-газа $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}} = T/E_{\text{Ф.}}$. В случае сильновзаимодействующего газа $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}}$ очевидным образом отлична от $T/E_{\text{Ф.}}$, что обсуждается в подразделе 3.5.3 и видно, например, на калибровочной кривой 3.11 на странице 73. На рисунке 7.2 кривая идеального газа рассчитана по формулам (7.3), (7.4), (7.5), где в качестве эффективной глубины потенциала использована величина $U_0/\sqrt{1 + \beta}$ вместо U_0 , использованной для рисунка 7.1. Замена $U_0 \rightarrow U_0/\sqrt{1 + \beta}$ даёт небольшое изменение кривой при наибольших температурах.

Второй интересный результат проявляется при взгляде на данные рисунка 7.2 в более детальном масштабе. На рисунке 7.3 показана низкотемпературная часть этой зависимости. В этой области все точки, кроме точки с наименьшей температурой, лежат ниже

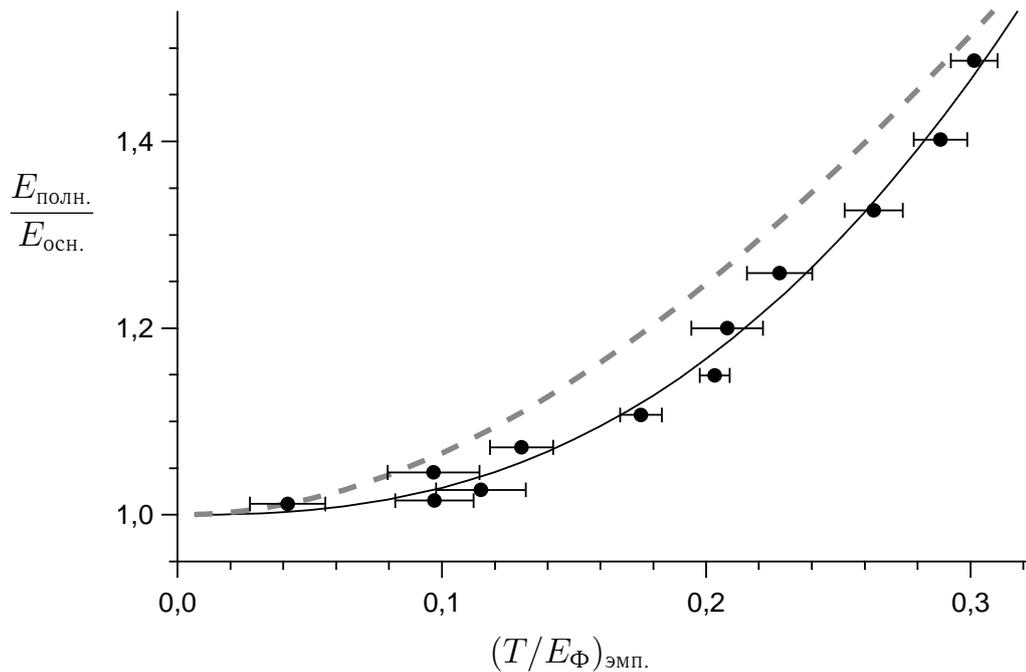


Рисунок 7.3 — Сильновзаимодействующий ферми-газ ниже температуры фазового перехода. Нормированная энергия в зависимости от эмпирической температуры. Точками показаны данные. Штриховая — расчёт для идеального ферми-газа. Сплошная — подгонка данных зависимостью (7.8).

кривой идеального газа. Положение точек ниже кривой — это систематический эффект, а не следствие случайных флуктуаций. Если бы это было следствием случайных ошибок, то точки были бы равномерно распределены выше и ниже кривой. Точка с наименьшей температурой лежит на кривой идеального газа из-за выбора поправочного коэффициента $\eta = 1,01$ в выражении для энергии газа (3.32).

Подогнав данные рисунка 7.3 степенной функцией, получим более высокую степень, чем у идеального ферми-газа:

$$\frac{E_{\text{полн.}}}{E_{\text{осн.}}} - 1 = 9,8 \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}}^{2,53} \quad (7.8)$$

Точка с наименьшей температурой в подгонке не использовалась, поскольку её положение на кривой идеального газа задано заранее.

При повышении температуры данные ложатся на кривую идеального ферми-газа, то есть понижается показатель степени в зависимости $E_{\text{полн.}}$ от $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$. В случае резкого изменения степени должен наблюдаться излом, по которому может быть идентифицирован фазовый переход. Изменение степенных зависимостей удобно наблюдать на графике в логарифмическом масштабе, на котором изменение степени отслеживается по изменению наклона. В логарифмическом масштабе зависимость $E/E_{\text{осн.}}$ от $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ показана на рисунке 7.4. На этом графике виден излом в зависимости для сильновзаимодействующего

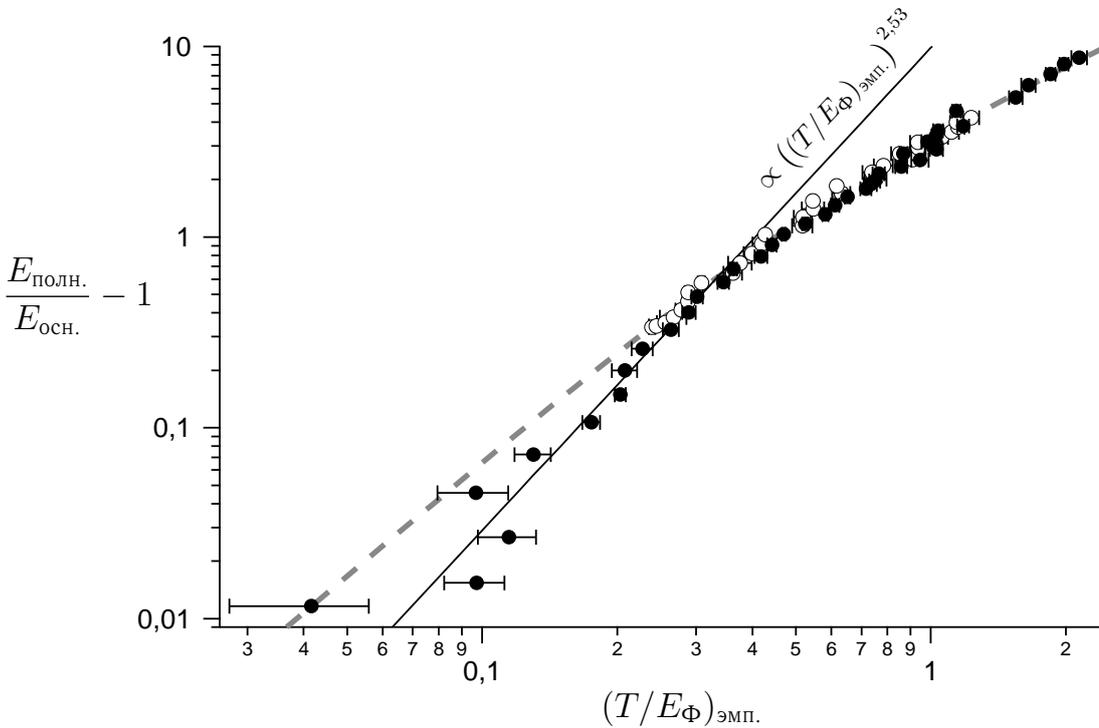


Рисунок 7.4 — Зависимость энергии от эмпирической температуры на логарифмической шкале. Точки — данные для сильновзаимодействующего газа. Кольца — данные для идеального ферми-газа. Сплошная — подгоночная функция (7.8). Штриховая — теория идеального ферми-газа.

газа при

$$\left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} = 0,33 \pm 0,03. \quad (7.9)$$

Выше этой точки данные совпадают с кривой для идеального ферми-газа, а ниже — последовательно отклоняются вниз от этой кривой. Точка $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} = 0,33$ идентифицирована по пересечению подгоночной функции (7.8) с кривой для идеального ферми-газа. В доверительный интервал включена лишь статистическая ошибка связанная с неопределённостью в положении точки пересечения.

Наблюдаемый излом в зависимости $E_{\text{полн.}}$ от $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}$ свидетельствует о фазовом переходе. Излом может быть как следствием излома в зависимости $E_{\text{полн.}}(T)$, так и результатом изменений свойств термометра, то есть — следствием излома функции $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}(T)$.

Также наблюдаемый излом может возникать из-за излома в обеих функциях. В качестве термометра выступает исследуемая система, поэтому излом даже в одной лишь функции $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}(T)$ говорит о резком изменении свойств системы и служит свидетельством фазового перехода. Энергия, приходящаяся на один атом $E \equiv E_{\text{полн.}}/2N$, в точке фазового перехода составляет

$$E_{\text{кр.}} = (0,85 \pm 0,05) E_{\Phi}, \quad (7.10)$$

где в доверительный интервал включена лишь статистическая ошибка.

Зависимость энергии от термодинамической температуры T может быть получена из данных путём калибровки эмпирического термометра, то есть построения функции $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}(T)$. Такое построение возможно путём применения какой-либо теоретической модели. Подобная калибровка произведена в рамках теории, использующей на резонансе состояние из теории Бардина–Купера–Шрифера, а также учитывающей наличие молекул в синглетном канале и их взаимодействие с куперовскими парами [97, 5]. Процедура калибровки описана в подразделе 3.5.3, а функция $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}}(T/E_{\Phi})$ показана на рисунке 3.11, на странице 73. Используя эту калибровку, зависимость измеренной энергии от термодинамической температуры построена на рисунке 7.5. Можно видеть, что при пере-

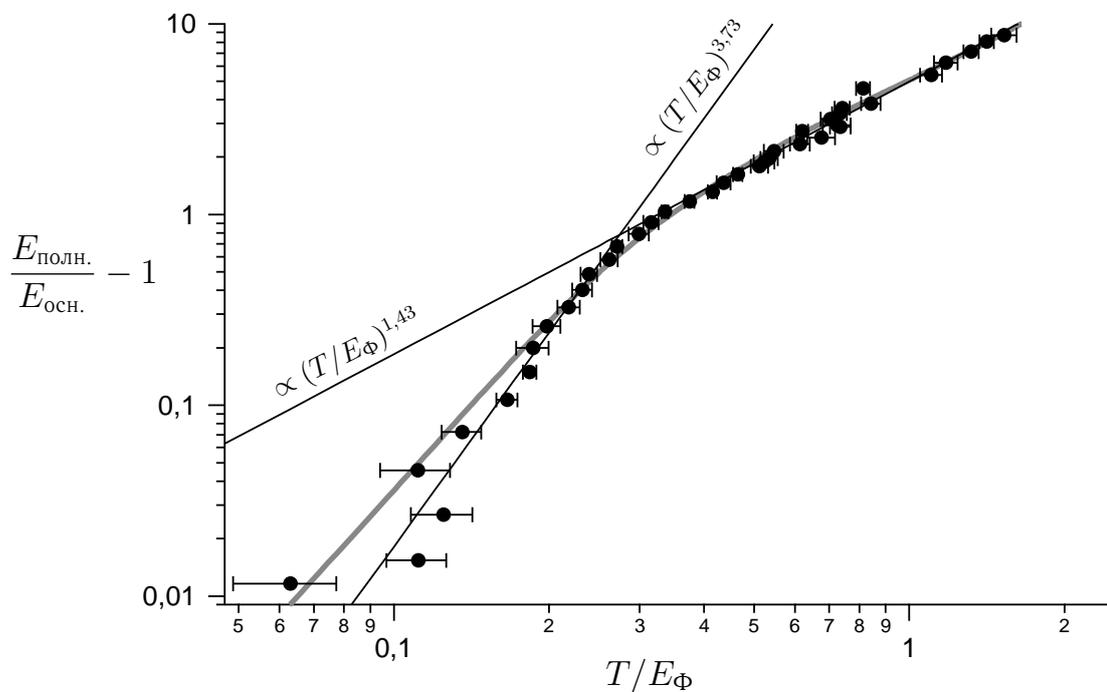


Рисунок 7.5 — Зависимость энергии от термодинамической температуры T/E_{Φ} на логарифмической шкале. Точки и толстая серая кривая — соответственно данные и теория сильновзаимодействующего газа. Чёрные тонкие линии — подгонка данных выше и ниже фазового перехода функциями (7.12) и (7.13) соответственно.

ходе к термодинамической температуре излом усиливается. Температура предполагаемого фазового перехода $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} = 0,33$ по термодинамической шкале составляет

$$T_{\text{кр.}} = (0,27 \pm 0,02) E_{\Phi}. \quad (7.11)$$

Приведённый доверительный интервал включает в себя только статистическую ошибку, связанную с определением точки пересечения.

Подогнав данные ниже этой точки степенной зависимостью, получим высокую степень:

$$\frac{E_{\text{полн.}}}{E_{\text{осн.}}} - 1 = 97,3 \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^{3,73}, \quad (7.12)$$

а выше излома — существенно меньшую степень:

$$\frac{E_{\text{полн.}}}{E_{\text{осн.}}} - 1 = 4,98 \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)^{1,43}. \quad (7.13)$$

Сравнив подгонку (7.12) с низкотемпературными зависимостями для бозе- и ферми-газов в формулах (7.1) и (7.2) соответственно видно, что показатель 3,73 гораздо ближе к показателю бозе-газа, чем ферми-газа. Это говорит о том, что система обладает бозонными свойствами ниже температуры излома $T/E_{\Phi} = 0,27$, и служит дополнительным подтверждением наличия сверхтекучей фазы.

Температура фазового перехода в однородной системе $T_{\text{кр.}}/E_{\Phi}$ может быть оценена, пользуясь значением (7.11), измеренным для системы в параболическом потенциале. Для этого оценим локальную энергию Ферми в центре облака ε_{Φ} при температуре перехода. Как и при построении эмпирической термометрии (подраздел 3.5.3 на странице 72), воспользуемся тем, что при всех температурах форма профиля плотности напоминает распределение Томаса–Ферми идеального газа. Подставляя значение $(T/E_{\Phi})_{\text{эмп.}} = 0,33$ в формулы (3.13) и (3.14) можно оценить, что при температуре фазового перехода плотность в центре облака составляет 70% от плотности при $T = 0$. Это позволяет оценить локальную энергию Ферми

$$\varepsilon_{\Phi}(\vec{x} = 0) = 0,70^{2/3} \varepsilon_{\Phi} \Big|_{T=0} = 0,79 \frac{E_{\Phi}}{\sqrt{1+\beta}} \quad \text{при} \quad \left(\frac{T}{E_{\Phi}} \right)_{\text{эмп.}} = 0,33. \quad (7.14)$$

Выразив в формуле (7.11) E_{Φ} через ε_{Φ} , получим оценку критической температуры для однородной системы

$$T_{\text{кр.}}/E_{\Phi} = 0,91 T_{\text{кр.}}/E_{\Phi} = 0,24. \quad (7.15)$$

Использовано значение $\beta = 0,49$ (подраздел 5.2.1 на странице 94) ввиду того, что оно найдено методом, сходным с эмпирической термометрией, которая лежит в основе использованного в этом разделе метода нахождения критической точки: параметр β определён путём подгонки профиля плотности распределением Томаса–Ферми.

Найденное выше значение критической температуры $T_{\text{кр.}} = 0,27 E_{\Phi}$ зависит от модели микросостояния, на которую опирается калибровка эмпирической температурной шкалы. В то же время критическое значение энергии, приходящейся на один атом $E_{\text{кр.}} = 0,85 E_{\Phi}$, найдено способом, который не зависит от модели состояния системы.

Измерения $E_{\text{полн.}}(T)$ могут быть использованы для проверки теорий сильно взаимодействующих систем. На рисунке 7.5 данные для сильно взаимодействующего газа сравниваются с теорией, которая была использована для калибровки эмпирического термометра. На логарифмической шкале видно согласие модели с данными для сильно взаимодействующего газа. Однако в теории изменение степенной зависимости $E_{\text{полн.}}(T)$ происходит несколько более плавно, чем в эксперименте. Сравнение теории с экспериментом на линейной шкале показано на рисунке 7.6. Энергия $E \equiv E_{\text{полн.}}/2N$ представляет собой энергию в расчёте на один атом. Теоретический подход описан в работах [189, 97, 5]. Теория предсказывает температуру фазового перехода $T_{\text{кр.}} = 0,29 E_{\Phi}$, что согласуется с признаками фазового перехода при $T = 0,27 E_{\Phi}$, наблюдаемыми в эксперименте. Используемая модель изначально была построена для высокотемпературного сверхпроводника, а уже после адаптирована для газа атомов. В твёрдом теле аналогом синглетных молекул-бозонов выступают компактные пары электронов [190, 191]. Таким образом, эксперимент с атомной системой позволил проверить правильность теории, которая была изначально сформулирована для твёрдого тела.

Приведённые в этом разделе результаты опубликованы автором диссертации и коллегами в работе [97], сообщившей о впервые произведённом измерении $T_{\text{кр.}}$ в универсальной

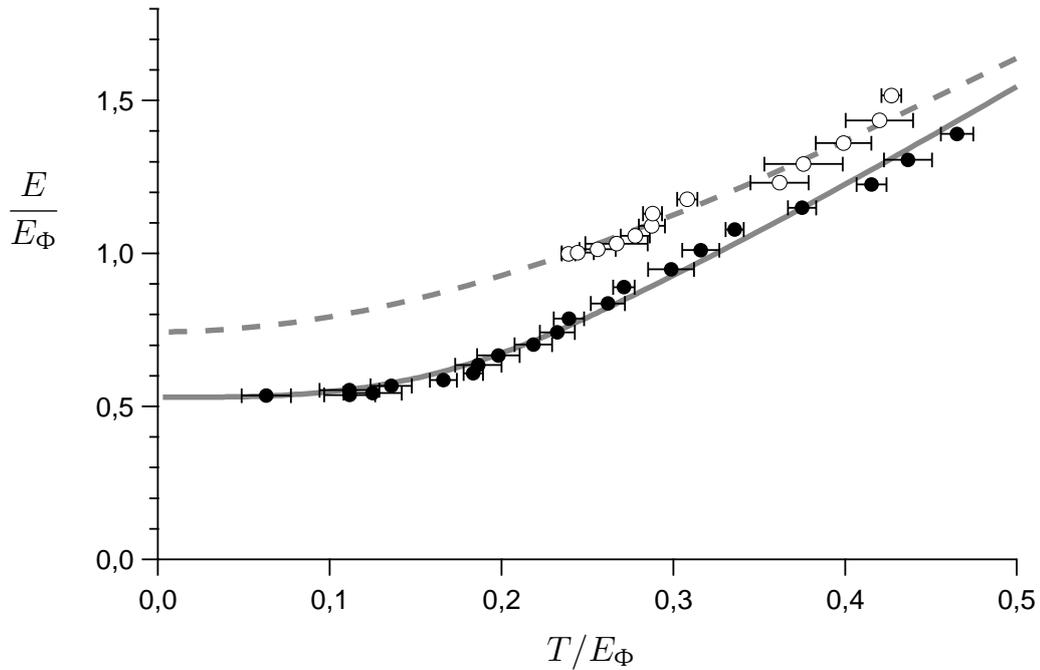


Рисунок 7.6 — Зависимость энергии от термодинамической температуры. Точки и сплошная — данные и теория для сильновзаимодействующего газа соответственно. Кольца и штриховая — данные и теория для идеального ферми-газа соответственно.
 $E \equiv E_{\text{полн.}}/2N$ — энергия, приходящаяся на один атом.

системе и, в частности, в сильновзаимодействующем ферми-газе атомов. Также приведённые результаты представляют собой впервые выполненное измерение зависимости энергии от температуры для универсальной системы и, в частности, для сильновзаимодействующего ферми-газа атомов.

7.4 Сравнение результатов измерения температуры и энергии в точке перехода к сверхтекучести

Впервые выполненные измерения критической температуры описаны в предыдущем разделе 7.3 и разделе 6.4 на странице 120. Результаты этих двух измерений помещены в таблицу 7.1. В обоих случаях погрешность содержит лишь статистические ошибки. Разницу значений, полученных двумя разными методами, можно рассматривать как оценку систематических погрешностей. В таблицу 7.1 также внесены результаты последующих измерений параметров фазового перехода.

Результат [7], приведённый во второй строке таблицы и описанный в диссертации, по-прежнему остаётся единственным, где поиск перехода к сверхтекучести производился наиболее прямым способом — путём наблюдения за свойствами потока жидкости. В работе [8] сверхтекучесть наблюдалась по вихрям во вращающемся газе, однако критическая температура измерена не была.

Последние три результата таблицы могут быть подвергнуты критике. В работе [192] переключение поля и выход из области сильных взаимодействий происходят за время, которое больше или сравнимо со временем межчастичных столкновений. Таким образом, метод измерения не исключает возможности формирования конденсата во время переключения поля. Кроме того, этот и следующий результат [70] стоит рассматривать как оценку критической температуры снизу, поскольку для однородных и квазиоднородных систем

Таблица 7.1 — Результаты измерений параметров фазового перехода в сильно взаимодействующем ферми-газе — температуры и приходящейся на один атом энергии. Звёздочкой отмечены результаты, описанные в предыдущем разделе 7.3 и разделе 6.4 на страницах 120–122. Теоретические предсказания — в таблице 2.2 на странице 48.

Метод	$T_{кр.}/E_{\Phi}$	$T_{кр.}/\varepsilon_{\Phi}$	$E_{кр.}/E_{\Phi}$	Год	Коллектив, ссылка
*По зависимости энергии от температуры	$0,27 \pm 0,02$	0,24	$0,85 \pm 0,05$	2005	Duke Univ. ([97] и раздел 7.3)
*По затуханию дышащей моды	$0,35 \pm 0,01$	0,38	$1,01 \pm 0,01$	2005	Duke Univ. ([7] и раздел 6.4)
По зависимости энтропии от энергии	$0,29^{+0,03}_{-0,02}$	—	$0,94 \pm 0,05$	2007	Duke Univ. [69]
По БЭК молекул, наблюдаемому после переключения магнитного поля на бозевскую сторону резонанса Фешбаха и последующего выключения поля	$0,24 \pm 0,03$ и $0,19 \pm 0,03$	—	—	2008	Univ. Electro-Communications [192]
По БЭК молекул, наблюдаемому после быстрого переключения магнитного поля на бозевскую сторону резонанса Фешбаха	$0,21 \pm 0,02$	$0,17 \pm 0,01$	$0,78 \pm 0,03$	2010	Univ. Electro-Communications [70]
По отклонению от теории ферми-жидкости Ландау, наблюдаемому в зависимости давления от $T/\mu_{лок.}$	$0,19 \pm 0,02$	$0,157 \pm 0,015$	—	2010	Ecole Normale Supérieure [193]

бозе-эйнштейновская конденсация является достаточным условием сверхтекучести, но не необходимым.

Касательно последнего из приведённых в таблице результатов [193], отклонение от теории ферми-жидкости Ландау¹⁾ сложно считать критерием фазового перехода, поскольку не обоснована применимость модели ферми-жидкости к сильно взаимодействующему ферми-газу атомов. В частности, не идентифицирована ферми-сфера квазичастиц и сами слабо взаимодействующие квазичастицы. Применимость модели ферми-жидкости оспаривается в работе [194].

¹⁾Лев Давидович Ландау, 1908–1968

Глава 8

Мост между бозе- и ферми-состоянием

8.1 Задача об уравнении состояния на мосту БКШ–БЭК

Ультрахолодный ферми-газ атомов — первая и на данный момент единственная система, в которой экспериментально реализован мост между статистикой Ферми–Дирака и статистикой Бозе–Эйнштейна [19]. Количественное введение в свойства моста предложено в подразделе 2.7.3 на странице 51. Асимптотическое состояние на одной стороне моста — газ ферми-атомов со слабым притяжением, описываемый в рамках модели Бардина–Купера–Шриффера (БКШ); асимптотическое состояние на другой — бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) двухатомных молекул. В середине моста лежит область сильных взаимодействий ($k_{\Phi}|a| \gg 1$), свойства которой изучены в главах 5, 6 и 7. Мост БКШ–БЭК также предсказан для экситонов [20] и материи кварков [21], но до настоящего момента не наблюдался. Изучение свойств моста представляет собой фундаментальную задачу, выходящую за рамки атомной физики.

Моделирование свойств газа на мосту БКШ–БЭК, при произвольной длине рассеяния a , является сложной расчётной задачей. Различные подходы дают количественно разные результаты, что можно видеть на примере вычислений критической температуры сильновзаимодействующего газа, сведённых в таблицу 2.2 на странице 48. Построение уравнения состояния $\mu_{\text{лок.}}(n)$ при $T = 0$ — часть задачи о моделировании свойств системы на мосту БКШ–БЭК. Различные модели предлагались в работах [164, 140, 195, 177]. Следующий раздел посвящён экспериментальной проверке уравнения состояния.

В пределе БКШ ($1/\kappa_{\Phi}a \rightarrow -\infty$) уравнение состояния совпадает с уравнением идеального ферми-газа:

$$\mu_{\text{лок.}}(n) = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{2/3}. \quad (8.1)$$

В пределе БЭК ($1/\kappa_{\Phi}a \rightarrow +\infty$) уравнение состояния сводится к среднему полю газа молекул

$$\mu_{\text{лок.}}(n) = \frac{1}{2} \mu_{\text{лок. мол.}}(n) = \frac{2\pi\hbar^2 a_{\text{мол.}}}{m_{\text{мол.}}} n, \quad (8.2)$$

причём длина рассеяния молекул $a_{\text{мол.}}$ в разных моделях имеет разное значение. В модели среднего поля $a_{\text{мол.}} = 2a$ (подраздел 2.7.3 на странице 51), в то время как модель, точно учитывающая рассеяние 4 фермионов, предсказывает $a_{\text{мол.}} = 0,6a$ [111].

Следующий раздел посвящён проверке уравнения состояния $\mu_{\text{лок.}}(n)$ при $T \approx 0$ по зависимости скорости звука от межатомного взаимодействия, которое перестраивается при помощи явления резонанса Фешбаха, контролируемого внешним магнитным полем.

Показано, что скорость звука очевидно отличается от предсказаний теории среднего поля и лежит близко к значениям, рассчитанным методом Монте-Карло.

8.2 Проверка уравнения состояния по распространению звука

Измерение скорости звука даёт прямой доступ к уравнению состояния. Возбуждение звуковой волны и измерение скорости звука в веретенообразном облаке описано в разделе 3.7 на странице 78. Скорость звука может быть связана с уравнением состояния в рамках простой гидродинамической модели [138], справедливость которой подтверждена в разделе 3.7. В этой модели скорость звука в плоскости z связана с $\mu_{\text{лок.}}(n)$ выражением

$$c(z) = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\int n(\vec{x}) dx dy}{\int (d\mu_{\text{лок.}}/dn)^{-1} dx dy}}. \quad (8.3)$$

Для проверки уравнения состояния $\mu_{\text{лок.}}(n)$ также могли бы быть использованы ранее известные измерения энергии разлёта [162], распределения в пространстве импульсов [196] и размера облака [19]. Однако в отличие от рассматриваемой методики для интерпретации этих измерений требуется микроскопическая модель системы. В то же время, существующие модели дают количественно противоречивые результаты. Для вычисления $\mu_{\text{лок.}}(n)$ по энергии разлёта необходимо знать искомую зависимость $\mu_{\text{лок.}}(n)$. Измеренные распределения импульсов зависят от динамики переключения магнитного поля, при помощи которого в эксперименте выключается межчастичное взаимодействие [197]. Измерения размера облака чувствительны к состоянию газа на краях, которое при конечных температурах может отличаться от сверхтекучего состояния центра облака [198]. При наблюдении за звуковой волной, напротив, основной вклад вносит звук в центральной части облака.

Частота дышащей моды также зависит от уравнения состояния. Результаты измерения частоты в широком диапазоне взаимодействий на мосту БКШ–БЭК приведены в разделе 6.5 на странице 122. На рисунке 6.6 очевидна зависимость частоты от длины рассеяния a . Связь между частотой и уравнением состояния не зависит от модели микросостояния газа. Однако в отличие от скорости звука, частота не даёт доступа к полному уравнению состояния и зависит только от показателя политропы:

$$\gamma = \frac{d \ln \mu_{\text{лок.}}(n)}{d \ln n}. \quad (8.4)$$

Например, если уравнение состояния имеет вид

$$\mu_{\text{лок.}}(n) = \text{const } n^\gamma, \quad (8.5)$$

то частота поперечной дышащей моды зависит лишь от γ , но не от общего множителя, что видно, например, в формуле (6.43). В результате, в режиме сильного взаимодействия теории, дающие различные основные состояния, предсказывают одинаковую частоту [183, 199]. На бозевской асимптоте моста БКШ–БЭК частота не чувствительна к значению $a_{\text{мол.}}$. В отличие от дышащей моды, скорость звука чувствительна к общему множителю в уравнении состояния (8.5).

В эксперименте скорость звука измерена в большей части моста БКШ–БЭК. На рисунке 8.1 показан результат измерений — зависимость нормированной скорости звука c_0/v_Φ от параметра взаимодействия $1/k_\Phi a$. Приведена скорость звука в центральном се-

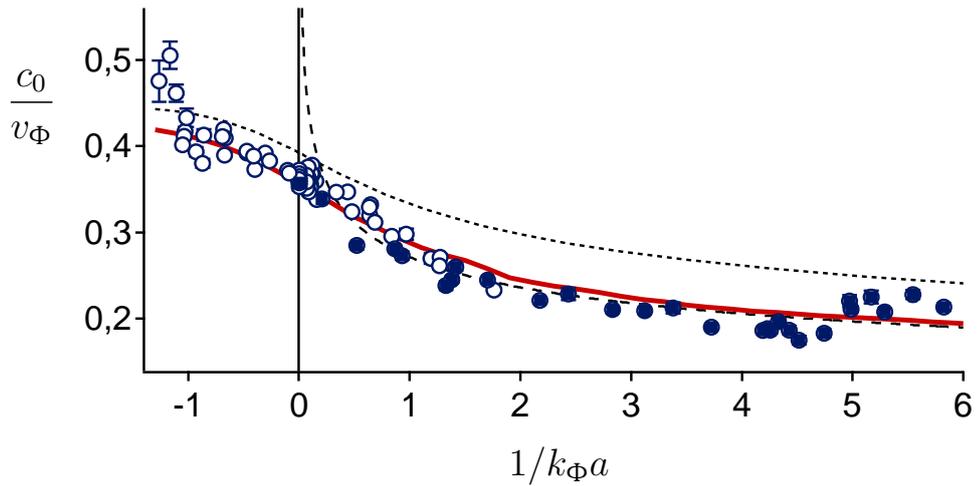


Рисунок 8.1 — Нормированная скорость звука c_0/v_F в зависимости от параметра взаимодействия $1/k_F a$. Кружки и кольца отвечают измерениям в ловушке глубиной 140–500 нК и 0,6–80 мК соответственно. Сплошная красная линия — расчёты методом Монте-Карло. Пунктир — расчёт в модели среднего поля. Штриховая линия — формула (8.7) для БЭК молекул при $a_{\text{мол.}} = 0,6 a$.

чении облака $z = 0$. Нормировочные величины — скорость v_F и волновой вектор Ферми k_F — выражаются через энергию Ферми идеального ферми-газа с тем же числом частиц в каждом спиновом состоянии N , что и во взаимодействующем газе, и в гармоническом потенциале с теми же частотами:

$$E_F = \hbar(\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} (6N)^{1/3} = \frac{mv_F^2}{2} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \quad (8.6)$$

Эксперимент выполнен с атомами лития-6, приготовленными в двух равнонаселённых спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$ в веретенообразном потенциале. Параметр взаимодействия $1/k_F a$ варьируется путём перестройки длины рассеяния a и волнового вектора k_F . В свою очередь a контролируется при помощи магнитного поля B , выбираемого в пределах от 700 до 1100 Гс, по обе стороны от резонанса Фешбаха при 834 Гс. Волновой вектор k_F контролируется путём выбора глубины оптической ловушки U_0 в пределах от 0,14 до 80 мК. Число атомов N в каждом спиновом состоянии варьируется от $3 \cdot 10^4$ для молекулярного БЭК до $2,5 \cdot 10^5$ вблизи и выше резонанса Фешбаха. Потенциал складывается из оптического и магнитного (раздел 3.4 на странице 68). Частота магнитного $\omega_B/2\pi = 20,5$ Гц при 834 Гс. Отношение поперечной и продольной частоты ω_\perp/ω_z варьируется от 4,1 до 25 в зависимости от U_0 . При $U_0 = 8,3$ мК, например, $\omega_\perp/2\pi = 688 \pm 2$ Гц и $\omega_z/2\pi = 34,4 \pm 0,2$ Гц. Отношение $\omega_x/\omega_y = 1,056$.

Во всех случаях температура газа $\ll E_F$, что можно видеть по профилю плотности: вблизи резонанса Фешбаха профиль плотности близок к ноль-температурному распределению Томаса–Ферми (2.106); в режиме молекулярного БЭК температурная компонента не зарегистрирована. При $T = 0$ единственным параметром системы является параметр взаимодействия $1/k_F a$. При $|1/k_F a| \ll 1$ газ находится в сильновзаимодействующем режиме, при $1/k_F a < -1$ — представляет собой слабовзаимодействующую ферми-систему, при $1/k_F a > 1$ — бозе-эйнштейновский конденсат молекул.

В режиме БЭК, при $1/k_F a > 1$, в эксперименте исследуются взаимодействия композитных бозонов — молекул, образованных парами ферми-атомов. Состояние системы может рассматриваться как БЭК точечных молекул, сталкивающихся с длиной рассеяния $a_{\text{мол.}}$.

Используя в выражении (8.3) для c_0 уравнение состояния (8.2), найдём, что

$$\frac{c_0}{v_\Phi} = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} k_\Phi a_{\text{мол.}} \right)^{1/5}. \quad (8.7)$$

Модель, точно учитывающая рассеяние 4 фермионов, предсказывает $a_{\text{мол.}} = 0,6a$ [111]. С такой длиной рассеяния выражение (8.7) даёт скорость звука, совпадающую с измерениями и показанную на рисунке 8.1 штриховой линией. Напротив, теория среднего поля [94], использующая основное состояние в форме (2.100), предсказывает $a_{\text{мол.}} = 2a$ (подраздел 2.7.3 на странице 51) и даёт скорость звука, которая на 27% выше наблюдаемой в режиме БЭК.

Данные, представленные на рисунке 8.1, позволяют проверять уравнение состояния в большей части моста между режимами БКШ и БЭК. Пунктирной линией показаны расчёты [141], сделанные в приближении среднего поля [94] на основе состояния (2.100). Фактическая скорость звука очевидно меньше, чем рассчитанная в этом приближении. Расчёты [141] в рамках альтернативной модели показаны красной сплошной линией. Эта модель основана на квантовом алгоритме Монте-Карло [140] и находится в гораздо лучшем согласии с данными. Стоит заметить, что в большей части области БЭК скорость звука систематически ниже и этой кривой.

Меньшая скорость в большей части режима БЭК, при $1 < 1/k_\Phi a < 5$, может быть следствием перемешивания первого и второго звука [200]. Второй звук имеет меньшую скорость, что может приводить к замедлению скорости распространения возбуждения. Отличие температуры от 0 вряд ли стало причиной замедления звука: во-первых, в БЭК молекул не зарегистрирована тепловая компонента; во-вторых, на резонансе Фешбаха наблюдается противоположный эффект — увеличение температуры приводит к увеличению c_0 . Тёмный солитон движется медленнее скорости звука, и его присутствие могло бы объяснить замедление. Однако наблюдения противоречат формированию солитона. Размер солитона сравним с длиной когерентности [201, 202] $\hbar/\sqrt{2\mu_{\text{лок.}}m_{\text{мол.}}} < 1$ мкм и сохраняется в ходе распространения. В то же время, наблюдаемые провалы плотности солитонами не являются, поскольку имеют размер 10–20 мкм и очевидным образом расплываются, что можно видеть на рисунке 3.13 на странице 80.

Измерения на бозевской асимптоте моста были проведены настолько далеко по параметру $1/k_\Phi a$, насколько это оказалось возможно. Для достижения $1/k_\Phi a > 5$ и магнитное поле, и глубина ловушки настраивались так, чтобы одновременно минимизировать и k_Φ , и a . При $1/k_\Phi a > 5$ измерения показывают рост величины c_0/v_Φ . В этом режиме, однако, съёмка осложнена из-за недостаточного разлёта облака после выпуска из оптической ловушки: химический потенциал не настолько велик в сравнении с потенциалом магнитного поля, чтобы облако разлетелось достаточно для точного замера положения фронта звуковой волны.

В дальней фермиевской части резонанса, при $1/k_\Phi a < -1,3$, распространение звука не наблюдается. Вместо распространения провал плотности просто заполняется, как в идеальном ферми-газе. При наименьших достигнутых температурах, в области слабых взаимодействий газ не обязательно находится в сверхтекучей фазе. Гидродинамическое распространение звука в этом случае обеспечивается благодаря столкновениям, а не сверхтекучей компоненте.

Представленные измерения скорости звука могут служить проверке теоретических моделей моста БКШ–БЭК, как это было показано на примере сравнения данных с теорией среднего поля и расчётов одним из методов Монте-Карло. Приведённые выше данные представляют собой впервые выполненные измерения скорости звука в ферми-газе атомов и бозе-эйнштейновском конденсате молекул. Результаты опубликованы автором диссертации и коллегами в работе [143].

Глава 9

Поиск квантового предела вязкости

9.1 Предсказание теории струн

В рамках струнных теорий сделано общее предсказание о том, что для любой жидкости отношение коэффициента сдвиговой вязкости η к плотности энтропии s ограничено снизу [44]:

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{4\pi}. \quad (9.1)$$

Нижний предел $\eta/s = \hbar/4\pi$ можно рассматривать как определение идеально невязкой жидкости. Кандидатом на роль такой системы выступает кварк-глюонная плазма. В первые мгновения после Большого взрыва кварк-глюонная плазма была основной формой материи. Сейчас кварк-глюонную плазму получают в ускорителях при столкновении тяжёлых ядер [30]. Другой кандидат — сильновзаимодействующий газ ферми-атомов.

Коэффициент сдвиговой вязкости можно определить через силу \vec{F} , возникающую между двумя плоскостями в вязкой жидкости при движении одной плоскости относительно другой со скоростью \vec{v} :

$$\vec{F} = \eta \frac{A}{d} \vec{v}, \quad (9.2)$$

где A — площадь каждой плоскости, а d — расстояние между ними, как показано на рисунке 9.1.

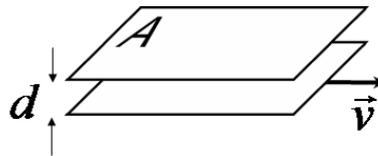


Рисунок 9.1 — Иллюстрация к определению коэффициента сдвиговой вязкости η формулой (9.2).

Струнные теории, на основании которых сделано утверждение (9.1), к настоящему моменту не имеют экспериментальных подтверждений. Достижение нижнего предела $\eta/s = \hbar/4\pi$ в широкой области параметров и демонстрация его непреодолимости могла бы стать первой экспериментальной проверкой этой группы теорий. Шаг в этом направлении сделан в рамках диссертационной работы. В подразделе 5.3.2 на страницах 99–104 показано, что сильновзаимодействующий газ является жидкостью в широком интервале температур. В последующем разделе 9.2 приведены измерения вязкости. Показано, что при малых температурах вязкость низка, а отношение η/s сравнимо со значениями в кварк-глюонной плазме.

9.2 Оценка вязкости в эксперименте с дышащей модой

Коэффициент сдвиговой вязкости имеет размерность

$$\eta = \frac{\text{импульс}}{\text{сечение рассеяния}}. \quad (9.3)$$

В ферми-системе с резонансными s -волновыми взаимодействиями межчастичное расстояние $L \sim 1/k_F$ выступает в роли единственного параметра длины. Характерной величиной импульса является $\hbar k_F \sim \hbar/L$, а характерной величиной сечения рассеяния — унитарный предел $4\pi/k_F^2 \sim L^2$. Таким образом,

$$\eta = \frac{\text{импульс}}{\text{сечение рассеяния}} \sim \frac{\hbar/L}{L^2} = \hbar n. \quad (9.4)$$

То есть для системы с резонансными s -волновыми взаимодействиями наиболее общий вид коэффициента сдвиговой вязкости

$$\eta = \alpha \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right) \hbar 2n, \quad (9.5)$$

где $\alpha(T/\varepsilon_F)$ — безразмерная функция. Такой вид η ранее обсуждался в работе [30]. Величина $\hbar n$, в результате, становится естественной единицей сдвиговой вязкости, а вопрос об измерении η сводится к измерению значений α .

Оценим отношение η/s для газа ферми-атомов на основе экспериментальных данных. Исследуем сильно взаимодействующий ферми-газ атомов лития-6, приготовленный в двух равнонаселённых спиновых состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Газ находится в веретенообразном потенциале, близком к параболическому, и кинематически трёхмерен, а $n(\vec{x})$ — распределение концентрации атомов в каждом спиновом состоянии. Сильные взаимодействия достигнуты благодаря настройке магнитного поля на величину $B = 840$ Гс, лежащую вблизи s -волнового резонанса Фешбаха при 834 Гс.

Для оценки отношения η/s на основе экспериментальных данных выразим его через величины, которые напрямую измеримы в эксперименте. Отдельно проинтегрируем числитель и знаменатель:

$$\frac{\eta}{s} \approx \frac{\int \eta(\vec{x}) d^3 \vec{x}}{\int s(\vec{x}) d^3 \vec{x}} = \frac{\langle \alpha \rangle \hbar 2N}{S_{\text{полн.}}}, \quad (9.6)$$

где

$$\langle \alpha \rangle \equiv \frac{1}{N} \int \alpha \left(\frac{T}{\varepsilon(n(\vec{x}))} \right) d^3 \vec{x} \quad - \quad (9.7)$$

результат усреднения функции α по всему облаку.

В формуле (9.6) величина $S_{\text{полн.}}$ представляет полную энтропию облака. Энтропия, приходящаяся на один атом, $S \equiv S_{\text{полн.}}/2N$ измерена как функция от E — энергии, приходящейся на атом. Различные значения E соответствуют разным температурам и могут быть однозначно сопоставлены с величиной T/E_F . В отличие от температуры, E может измеряться напрямую, не опираясь на модель микросостояния газа, что обсуждается в подразделе 3.5.1 на странице 70. Зависимость $S(E)$ измерена коллегами автора диссертации без его участия [69]. Для измерения E использован метод, являющийся частью данной диссертации (подраздел 3.5.4 на странице 75).

Для измерения α или усреднённой величины $\langle \alpha \rangle$ необходим эксперимент, в котором происходит перемещение слоёв жидкости друг относительно друга. Такое перемещение,

в частности, происходит в поперечной дышащей моде облака, пленённого в веретенообразной ловушке. Подобная система исследована, например, в разделе 6.3 на странице 116 в контексте поиска эффекта сверхтекучести. Установим в этой системе связь между сдвиговой вязкостью и наблюдаемой величиной — декрементом поперечной дышащей моды $1/\tau$. Предположим, что затухание происходит исключительно из-за сдвиговой вязкости, а объёмная (вторая) вязкость равна нулю.

Для построения количественной модели затухания моды воспользуемся уравнением (5.16) невращательной, локально изоэнтروпийной гидродинамики. Добавим к нему тензор вязких напряжений ([203], §15), положив коэффициент объёмной (второй) вязкости равным нулю:

$$m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \left(U + \frac{m \vec{u}^2}{2} \right) - \frac{\nabla P}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{ikl} \bar{x}_i^0 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta(\vec{x}) \left(2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right). \quad (9.8)$$

В этом уравнении коэффициент сдвиговой вязкости даётся универсальным выражением (9.5). Давление тоже имеет универсальный вид (5.14). Для поперечной дышащей моды уравнение (9.8) можно решить автомодельной подстановкой (5.19), что позволяет выразить $\langle \alpha \rangle$ через величины, измеряемые в эксперименте:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{3m \langle x^2 \rangle}{\hbar \tau}. \quad (9.9)$$

Применение вириальной теоремы в форме (5.41) позволяет выразить $\langle \alpha \rangle$ через энергию на частицу E :

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{\omega_{\perp} \tau} \frac{E}{\hbar \omega_{\perp}}, \quad (9.10)$$

где использовано $\omega_x \approx \omega_{\perp}$. Зависимость $\langle \alpha \rangle$ от состояния системы удобно параметризовать энергией на частицу E поскольку этой величиной параметризованы измерения энтропии.

Декремент поперечной дышащей моды измерен в эксперименте, описанном в разделе 6.3 на странице 116. Состояние рассмотренной системы параметризовано при помощи эмпирической температуры. Вместо этого состояние можно параметризовать энергией, приходящейся на частицу $E \equiv E_{\text{полн.}}/2N$, поскольку в каждом эксперименте система приготавливается при известной энергии $E_{\text{полн.}}$. На рисунке 9.2 представлена зависимость нормированного декремента от $E/E_{\text{Ф}}$. Эта зависимость и формула (9.10) позволяют оценить величину $\langle \alpha \rangle$. Оценка зависимости $\langle \alpha \rangle$ от энергии показана на графике 9.3. Эти данные представляют собой впервые произведённое измерение сдвиговой вязкости в газе резонансно взаимодействующих ферми-частиц. В тех случаях, когда $\langle \alpha \rangle \lesssim 1$ можно говорить о том, что система находится в режиме квантовой вязкости. На графике 9.3 видно, что при наименьших энергиях этот режим реализован. Энергия на частицу $E \approx 0,5 E_{\text{Ф}}$ соответствует основному состоянию системы, а переход между сверхтекучим и нормальным состоянием, возможно, происходит вблизи $E = E_{\text{Ф}}$ (раздел 6.4 на странице 120).

Имея данные о вязкости и энтропии, можно оценить величину η/s , которая и является объектом исследования в данной главе. Объединение формул (9.6) и (9.10) даёт оценку

$$\frac{\eta}{s} \approx \hbar \frac{1}{S(E)} \frac{1}{\omega_{\perp} \tau} \frac{E}{\hbar \omega_{\perp}}. \quad (9.11)$$

Используя в этой формуле данные о вязкости с рисунка 9.3 и об энтропии из работы [69], получим оценку отношения η/s , показанную на графике 9.4.

Автор диссертации и коллеги опубликовали эту оценку в работе [179]. Примерно в это же время другой автор [204] также опубликовал оценку η/s в газе ультрахолодных ферми-атомов. В рецензируемом журнале его работа вышла чуть позже, чем у автора

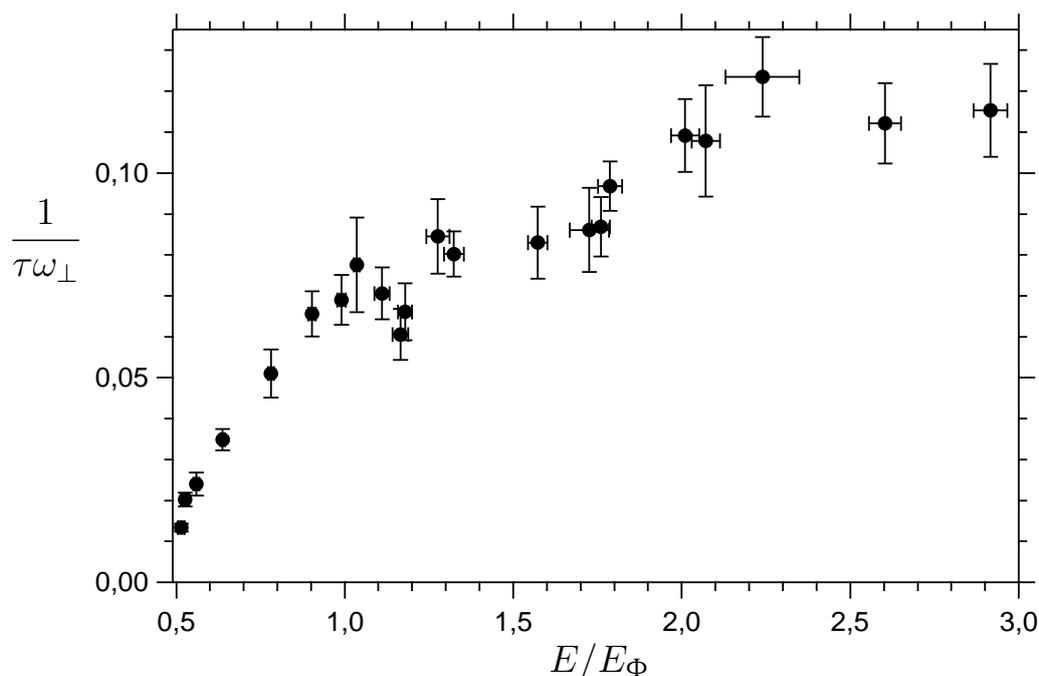


Рисунок 9.2 — Нормированный декремент поперечной дышащей моды в зависимости от энергии, приходящейся на один атом, нормированной на E_Φ .

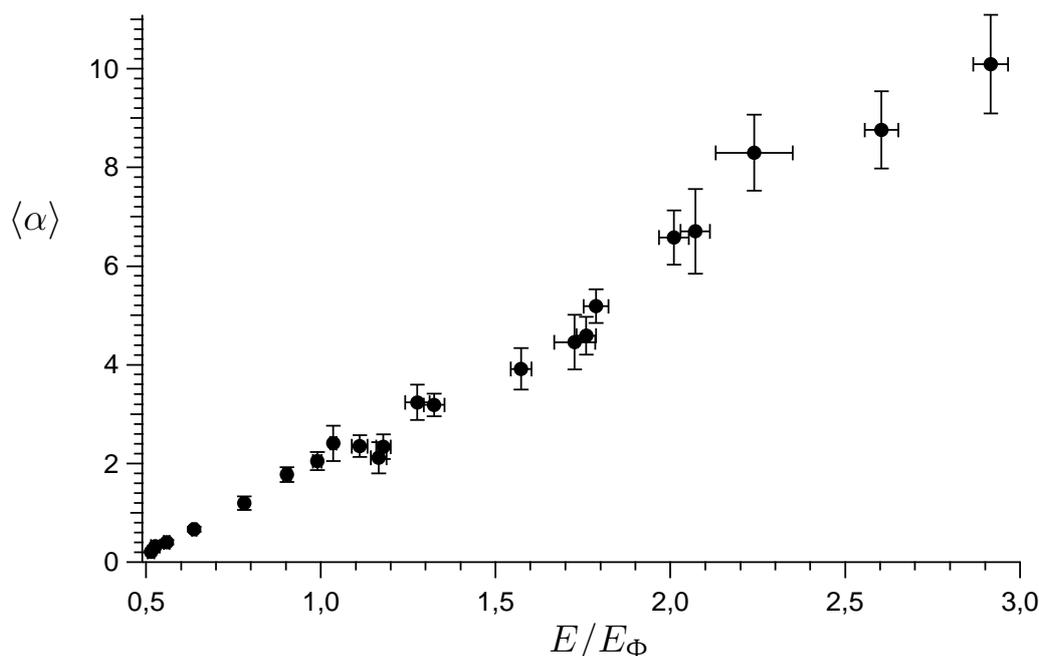


Рисунок 9.3 — Вязкость в зависимости от энергии. Коэффициент сдвиговой вязкости имеет вид $\eta = \alpha \hbar 2n$. Показана безразмерная функция $\alpha(T/\varepsilon_\Phi)$, усреднённая по ловушке.

диссертации, а виде препринта — чуть раньше. В работе [204] использованы данные, полученные автором диссертации и коллегами и опубликованные в работах [7, 69], а небольшое отличие в анализе от приведённого выше заключается в расчёте затухания из производной по времени от полной энергии газа, а не из решения уравнения Навье¹⁾–

¹⁾Claude Louis Marie Henri Navier, 1785–1836

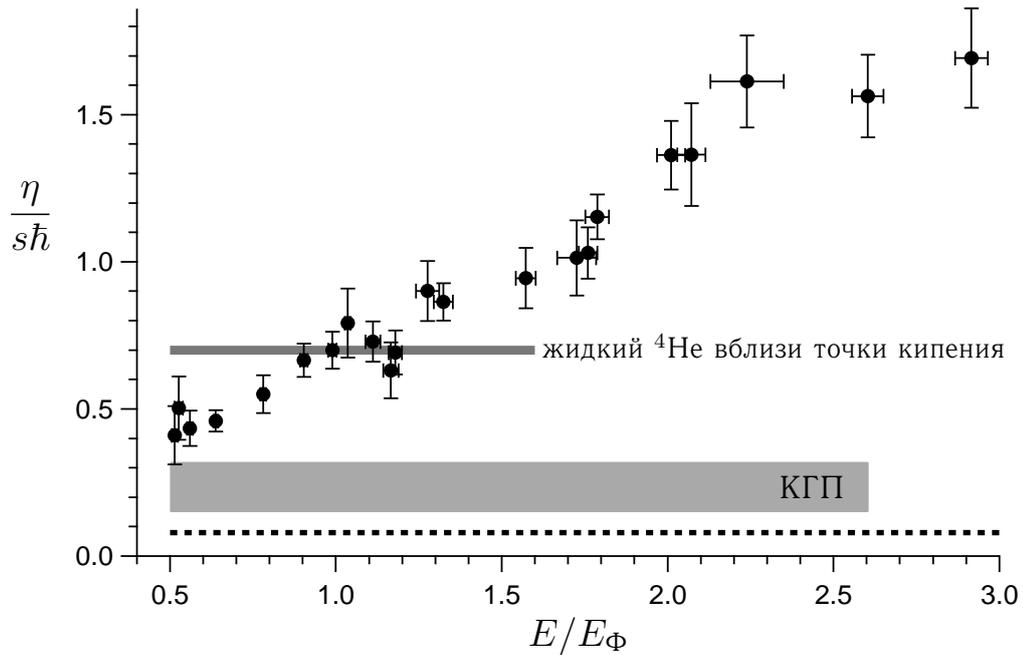


Рисунок 9.4 — Оценка отношения η/s в зависимости от энергии для сильновзаимодействующего газа ферми-атомов (точки). Пунктирная прямая — нижний предел $\eta/s = \hbar/4\pi$ в теории струн. Также показана оценка η/s для кварк-глюонной плазмы (КГП) и значение для жидкого гелия-4 вблизи точки кипения ($T = 4,2$ К, $P = 1$ атм.), вне зависимости от энергии.

Стокса²⁾ (9.8), а также — в параметризации состояния системы при помощи температуры T/E_{Φ} , а не энергии на частицу E .

На графике 9.4 сравниваются свойства атомного ферми-газа со свойствами других систем. Показано значение η/s для жидкого гелия-4 вблизи точки кипения ($T = 4,2$ К, $P = 1$ атм.), составляющее $\approx 0,7\hbar$ ([44] и ссылки в ней), и для кварк-глюонной плазмы, в случае которой различные модели и методы обработки данных дают значения $(1,89-3,99)\hbar/4\pi = (0,15-0,32)\hbar$ [205]. Как в случае гелия, так и для кварк-глюонной плазмы, на графике не рассматривается зависимость η/s от энергии, а приведены лишь минимальные значения. Для атомной системы наименьшие значения η/s лежат ниже значения для гелия. В то же время эти значения несколько выше оценки для кварк-глюонной плазмы. В приведённом выше анализе коэффициент вязкости завышен, поскольку предполагается, что сдвиговая вязкость — единственная причина затухания. При построении более точной модели затухания дышащей моды может оказаться, что η/s лежит ещё ближе к предсказанию теории струн $\eta/s = \hbar/4\pi$. В частности, в более совершенной модели должно быть верно учтено затухание во внешней части облака [206], где столкновения редки и, следовательно, уравнения гидродинамики неприменимы. Более точное измерение сдвиговой вязкости и уточнение величины η/s может стать вопросом дальнейших исследований. Достижение барьера $\eta/s = \hbar/4\pi$ в широкой области параметров и демонстрация его непреодолимости позволили бы экспериментально проверить теорию струн, которая на данный момент не подтверждена в экспериментах.

²⁾George Gabriel Stokes, 1819–1903

Глава 10

Заключение

В экспериментах всесторонне изучен сильно взаимодействующий ферми-газ атомов, что позволило проверить фундаментальные модели и теории, в том числе, применимые к другим ферми-системам — ядерной материи, высокотемпературным сверхпроводникам, кварк-глюонной плазме. В результате этих экспериментов для ферми-системы с резонансными s -волновыми взаимодействиями, в том числе для атомного газа

- впервые получено непротиворечивое свидетельство сверхтекучести;
- впервые измерена температура и энергия перехода к сверхтекучести, причём, двумя различными способами;
- впервые измерена зависимость энергии от температуры;
- впервые измерена вязкость; проверено предсказание теории струн о фундаментальном нижнем пределе вязкости;
- впервые при конечных температурах проверена гипотеза об универсальности сильно взаимодействующей ферми-системы.

Впервые наблюдалось распространение звука в ферми-газе атомов и его производной, бозе-эйнштейновском конденсате молекул. На основе прецизионных измерений скорости звука выполнена проверка уравнения состояния ферми-системы на мосту БКШ–БЭК.

Впервые приготовлен двумерный ферми-газ атомов, открывающий путь экспериментальной реализации широкого круга задач: обнаружению неоднородной сверхтекучести Фульде–Ферела–Ларкина–Овчинникова, наблюдению новых типов фазовых переходов, созданию бездефектной модели высокотемпературного сверхпроводника с управляемой извне константой связи. Последнее позволит проверить двумерные теории высокотемпературной сверхпроводимости.

Разработана серия новых экспериментальных методов, позволивших выполнить перечисленные наблюдения. Методы уже нашли применение в последующих экспериментах над ультрахолодными газами ферми-атомов. Методы являются достаточно общими, их применимость не ограничена атомом лития.

Впервые в России создана экспериментальная установка для приготовления вырожденного газа атомов и молекул, как в режиме фермиевского вырождения, так и бозе-эйнштейновской конденсации. Достигнуты наименьшие в стране температуры, до 18 нК.

Приложение А

Идеальный ферми-газ в дископодобном гармоническом потенциале

А.1 Формулировка задачи

Рассмотрим газ из N фермионов, помещённый в параболический потенциал

$$U(\vec{x}) = \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Потенциал сильно анизотропный — $\omega_z \gg \omega_{\perp}$. В направлении z населены лишь несколько нижних энергетических уровней, а в ортогональных направлениях населено много уровней. Предположим, что для направлений x, y может быть использовано приближение локальной однородности. Газ поляризован, то есть все фермионы находятся в одном и том же спиновом состоянии.

Найдём химический потенциал и распределение концентрации частиц при произвольной температуре. Начнём со случая $T = 0$ как наиболее простого.

А.2 Энергия Ферми и профили концентрации при $T = 0$

Энергия Ферми

Глобальная энергия Ферми $E_{\text{Ф}}$ может быть найдена из уравнения для числа частиц:

$$N = \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}} \int_{\frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m} + \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2} < E_{\text{Ф}}} \frac{d^2 \vec{k}_{\perp} d^2 \vec{\rho}_{\perp}}{(2\pi)^2}. \quad (\text{A.2})$$

Интегрирование происходит по всему занятому фазовому пространству движения вдоль x и y , а суммирование — по всем населённым уровням движения вдоль z , от 0 до l_{max} . Номер верхнего населённого уровня

$$l_{\text{max}} = \left[\frac{E_{\text{Ф}}}{\hbar\omega_z} \right], \quad (\text{A.3})$$

где скобками [...] обозначена целая часть числа. Энергия Ферми отсчитывается от энергии основного состояния осциллятора $\frac{1}{2}\hbar\omega_z$. Уравнение (A.2) преобразуется к виду

$$N = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \int_0^{k_l} 2\pi k dk \int_0^{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}\sqrt{k_l^2 - k^2}} 2\pi\rho d\rho, \quad (\text{A.4})$$

где $\hbar k_l$ — глобальный импульс Ферми для l -ого уровня, определяемый из E_{Φ} :

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_l^2 = E_{\Phi} - \hbar\omega_z l. \quad (\text{A.5})$$

В итоге получаем уравнение на E_{Φ} :

$$N = \frac{E_{\Phi}^2}{2\hbar^2\omega_{\perp}^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(1 - \frac{\hbar\omega_z l}{E_{\Phi}}\right)^2. \quad (\text{A.6})$$

После того, как E_{Φ} найдено, l -ое слагаемое уравнения (A.6) даёт населённость l -ого уровня.

Для двумерной системы $l_{\max} = 0$ и, следовательно,

$$E_{\Phi} = \hbar\omega_{\perp}(2N)^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Если населено лишь несколько уровней, то это выражение является достаточно точной оценкой сверху для E_{Φ} .

При $l_{\max} \rightarrow \infty$ уравнение (A.6) сходится к выражению для 3-мерного газа в приближении локальной однородности, $E_{\Phi} = \hbar(\omega_{\perp}^2\omega_z 6N)^{1/3}$.

Профили концентрации

Двумерное распределение концентрации $n_2(\rho)$ вдоль плоскости xy может быть представлено как сумма концентраций частиц, находящихся на каждом из уровней движения по z :

$$n_2(\rho) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} n_{2l}(\rho). \quad (\text{A.8})$$

Распределения n_{2l} находятся интегрированием фазовой плотности в пространстве импульсов:

$$n_{2l}(\rho) = \int_0^{\varkappa_l(\rho)} \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2} = \frac{\varkappa_l^2(\rho)}{4\pi}, \quad (\text{A.9})$$

где $\hbar\varkappa_l(\rho)$ — локальный импульс Ферми для частиц на l -ом уровне:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \varkappa_l^2 \equiv E_{\Phi} - \hbar\omega_z l - \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2}. \quad (\text{A.10})$$

В итоге, получаем:

$$n_{2l}(\rho) = \frac{mE_{\Phi l}}{2\pi\hbar^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_l^2}\right), \quad (\text{A.11})$$

где $E_{\Phi l} \equiv E_{\Phi} - \hbar\omega_z l$ — глобальная энергия Ферми для l -ого уровня, а $\rho_l \equiv \sqrt{2E_{\Phi l}/m\omega_{\perp}^2}$ — радиус Томаса–Ферми для l -ого уровня.

При фотографировании системы происходит интегрирование профиля концентрации вдоль y . По z интегрирование уже выполнено, так как рассматривается 2-мерное распределение $n_2(x, y)$. Профиль линейной концентрации $n_1(x)$ может быть получен интегрированием выражений (A.8) и (A.11):

$$n_1(x) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} n_{1l}(x), \quad (\text{A.12})$$

$$n_{1l}(x) = \sqrt{\frac{m\omega_{\perp}}{\hbar}} \frac{\sqrt{8}}{3\pi} \left(\frac{E_{\Phi l}}{\hbar\omega_{\perp}} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{x^2}{\rho_l^2} \right)^{3/2}. \quad (\text{A.13})$$

Двумерная система соответствует случаю $l_{\max} = 0$.

А.3 Химический потенциал и профили концентрации при $T > 0$

Химический потенциал

Рассчитаем глобальный химический потенциал μ из уравнения для полного числа частиц:

$$N = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{1}{e^{\frac{1}{T} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2} + \hbar\omega_z l \right) - \frac{\mu}{T}} + 1} \frac{d^2 \vec{k}_{\perp} d^2 \vec{\rho}_{\perp}}{(2\pi)^2} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} N_l. \quad (\text{A.14})$$

Суммирование чисел заполнения производится по всем дискретным уровням гармонического потенциала, а интегрирование — по всему бесконечному 4-мерному фазовому пространству движения в плоскости xy . Введём обозначения для глобального химического потенциала частиц на l -ом уровне μ_l и для локального химического потенциала частиц на l -ом уровне $\mu_{\text{лок.}l}(\rho)$:

$$\mu_l \equiv \mu - \hbar\omega_z l, \quad \mu_{\text{лок.}l}(\rho) \equiv \mu - \hbar\omega_z l - \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho^2}{2}. \quad (\text{A.15})$$

Плотность частиц в l -ом состоянии осциллятора может быть получена интегрированием чисел заполнения по пространству импульсов:

$$n_{2l}(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\hbar^2 k^2}{2mT} - \frac{\mu_{\text{лок.}l}}{T}} + 1} \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2} = \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \ln(1 + e^{\mu_{\text{лок.}l}(\rho)/T}). \quad (\text{A.16})$$

При $T \rightarrow 0$ это выражение сходится к распределению (A.11):

$$n_{2l}(\rho) \rightarrow \frac{m}{2\pi\hbar^2} \mu_{\text{лок.}l}(\rho). \quad (\text{A.17})$$

Проинтегрировав плотность (A.16), получим число частиц на l -ом уровне осциллятора:

$$N_l = \int_0^{\infty} n_{2l}(\rho) 2\pi\rho d\rho = - \left(\frac{T}{\hbar\omega_{\perp}} \right)^2 \text{Li}_2(-e^{\mu_l/T}). \quad (\text{A.18})$$

Символом Li_{ν} обозначена полилогарифмическая функция ν -того порядка, определённая на множестве комплексных чисел рядом

$$\text{Li}_{\nu}(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\nu}}. \quad (\text{A.19})$$

В итоге, уравнение на μ может быть записано в виде

$$N = \sum_{l=0}^{\infty} N_l(\mu), \quad (\text{A.20})$$

где N_l заданы выражением (A.18).

Судя по численному моделированию, в двумерном случае при $T/E_{\Phi} \ll 1$ справедливо разложение $\mu/E_{\Phi} = 1 - \alpha \left(\frac{T}{E_{\Phi}}\right)^2$, подобное 3-мерной формуле (2.35). Коэффициент α меньше, чем $\pi^2/3$.

Профили концентрации

Зная химический потенциал μ , можно найти двумерное распределение концентрации в плоскости xy , суммируя концентрации частиц на всех уровнях продольного осциллятора:

$$n_2(\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} n_{2l}(\rho), \quad (\text{A.21})$$

где $n_{2l}(\rho)$ рассчитываются по формуле (A.16).

Одномерный профиль концентрации может быть получен интегрированием $n_2(\rho)$ и $n_{2l}(\rho)$:

$$n_{1l}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} n_{2l}(x, y) dy = -\frac{\sqrt{m}T^{3/2}}{\sqrt{2\pi\hbar^2\omega_{\perp}}} \text{Li}_{3/2} \left(-e^{\frac{\mu_l}{T} - \frac{m\omega_{\perp}^2 x^2}{2T}} \right). \quad (\text{A.22})$$

Для вычисления этого интеграла, $\ln(1 + \dots)$ в формуле (A.16) разложен в ряд, а члены ряды проинтегрированы. Получившийся ряд оказался полилогарифмической функцией.

В двумерном случае существенно населён лишь основной уровень $l = 0$, поэтому

$$n_1(x) = n_{10}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} n_{2l}(x, y) dy = -\frac{\sqrt{m}T^{3/2}}{\sqrt{2\pi\hbar^2\omega_{\perp}}} \text{Li}_{3/2} \left(-e^{\frac{\mu}{T} - \frac{m\omega_{\perp}^2 x^2}{2T}} \right). \quad (\text{A.23})$$

Приложение Б

Поправки из-за ангармонизма внешнего потенциала

Внешние потенциалы, используемые для удержания атомов, рассмотрены в разделе 2.4 на странице 27 и разделе 3.4 на странице 68. При наименьших энергиях потенциалы неотличимы от гармонических. С ростом энергии ангармонизм потенциалов становится заметным в наиболее точных измерениях и поэтому должен учитываться при анализе данных. Во всех случаях достаточно учесть ангармонизм при помощи малых поправок.

Роль ангармонизма для трёхмерного газа в веретенообразной ловушке подробно рассмотрена в диссертациях Джозефа Кинаста [114] и Джеймса Джозефа [142]. В первой диссертации проанализировано влияние ангармонизма на термометрию, ввод энергии в газ, частоты дышащих мод, а также на разлёт газа, выпущенного из веретенообразной ловушки. Во второй — рассчитаны поправки к скорости звука. В этом приложении приводятся лишь конечные формулы поправок, а их вывод или пути вывода показаны в упомянутых диссертациях. Поправки рассматриваются лишь в тех случаях, если они превосходят погрешность измерения.

Частоты дышащих мод в описанной системе измерима наиболее точно. Из-за «мягкости» потенциала эти частоты чуть меньше, чем частоты тех же мод в параболическом потенциале. Измеренные частоты $\omega_{\text{изм.}}$, в результате, слегка отличаются от гипотетических частот ω , которые могли бы быть измерены в параболическом потенциале. Частоты $\omega_{\text{изм.}}$ для реального потенциала и частоты ω для гармонического могут быть связаны посредством малых поправок. Для поперечной дышащей моды невзаимодействующего ферми-газа, при $T \ll E_{\text{Ф}}$

$$\frac{\omega}{\omega_{\text{изм.}}} = 1 + \frac{6}{5} \frac{m\omega_{\perp}^2 \langle x^2 \rangle}{U_0}, \quad (\text{Б.1})$$

где $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ — среднеквадратичный размер облака. Для поперечной моды газа в унитарном пределе s -волновых взаимодействий можно написать две чуть различающихся поправки для двух областей температуры. При $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}} \leq 0,1$

$$\frac{\omega}{\omega_{\text{изм.}}} = 1 + \frac{64}{25} \frac{m\omega_{\perp}^2 \langle x^2 \rangle}{U_0}, \quad (\text{Б.2})$$

а в области $(T/E_{\text{Ф}})_{\text{эмп.}} \geq 0,5$

$$\frac{\omega}{\omega_{\text{изм.}}} = 1 + \frac{16}{5} \frac{m\omega_{\perp}^2 \langle x^2 \rangle}{U_0}. \quad (\text{Б.3})$$

Для произвольной температуры эти выражения можно комбинировать линейно или использовать несколько более точное выражение из раздела 7.1 работы [114]. Поправки рассчитаны для цилиндрически симметричной системы. Учёт отличия ω_x от ω_y стал бы

несущественной поправкой к поправке. В отличие от частоты декремент измеряется менее точно, поэтому поправки к декременту не учитываются.

Коэффициенты автомодельного расширения газа при разлёте в поперечном направлении, b_x и b_y , также рассчитываются с учётом небольшого влияния ангармонизма. Разлёт газа или жидкости, выпущенных из дипольной ловушки (2.16), происходит чуть медленнее, чем из гармонического потенциала с теми же частотами. Это можно учесть, заменив в уравнениях разлёта поперечные частоты потенциала ω_x и ω_y на чуть меньшие эффективные величины, рассчитанные по формуле

$$\left(\omega_i^{\text{эфф.}}\right)^2 = \frac{1}{m\langle X_i^2 \rangle} \left\langle X_i \frac{\partial U^{\text{стац.}}(\vec{X})}{\partial X_i} \right\rangle, \quad (\text{Б.4})$$

где под $U^{\text{стац.}}(\vec{X})$ понимается потенциал до резкого выключения дипольной ловушки. При расчётах в рамках гидродинамической модели замена производится в уравнениях (5.26), (5.27), (5.28). При расчёте при помощи кинетического уравнения замена производится в уравнениях (6.21), (6.25), (6.27).

При расчёте ввода энергии, описанного в разделе (3.6), ангармонизм учитывается путём добавки к правой части выражения (3.32) величины

$$\eta E_{\text{осн.}} \frac{E_{\Phi}}{U_0} \left(6 - b_x^4 - b_y^4 - 2b_z^4 - \frac{2}{3}(b_x^2 b_y^2 + b_x^2 b_z^2 + b_y^2 b_z^2) \right). \quad (\text{Б.5})$$

Эта формула верна как для сильновзаимодействующего, так и для идеального газа, хотя в этих случаях входящие в формулу величины принимают разные значения.

При термометрии поправки, связанные с ангармонизмом не учтены, поскольку они не превышают погрешности измерений.

Поправки к скорости звука задаются формулами (3.39) и (3.40) или их комбинацией, рассмотренной в подразделе 3.7.2 на странице 80.

Приложение В

Интерференция цепочки бозе-эйнштейновских конденсатов со случайными фазами

Сохранению порядка в системе с частично случайными начальными условиями посвящено это приложение. Эффект исследован в той же экспериментальной установке ИПФ РАН, где получены часть вынесенных на защиту результатов. Этот результат не выносится на защиту, поскольку не является многочастичным эффектом, хотя для его демонстрации и использован бозе-эйнштейновский конденсат. Описанный эффект может быть понят в рамках уравнения Шрёдингера и, таким образом, отнесён к квантовой оптике или к оптике материальных волн, но не к квантовым задачам многих тел. Приложение включено в диссертацию, чтобы показать применимость атомного ферми-газа для изучения эффектов из различных областей физики.

Для демонстрации эффекта рассмотрим интерференцию цепочки облаков бозе-эйнштейновских конденсатов молекул. Фотография конденсатов в начальный момент времени $t = 0$ показана на рисунке В.1а. Облака молекул удерживаются пучностями стоячей волны, потенциал которой описывается формулой (2.24). Распределение плотности вдоль z близко к периодическому $n(z) = n(z + d)$ с периодом $d = 5,3$ мкм. Фазы же соседних конденсатов являются случайными друг относительно друга. В момент $t = 0$ пленяющий потенциал выключается, что приводит к свободной эволюции и интерференции конденсатов, наблюдаемой в эксперименте. Интересный эффект состоит в том, что несмотря на беспорядочные фазы конденсатов, в ходе эволюции в распределении плотности присутствует порядок во все моменты времени кроме, может быть, небольшого начального интервала.

Наблюдаемый эффект можно рассматривать в качестве модификации эффекта Тальбо¹⁾. Оптический эффект Тальбо был открыт в 1836 году [207] и состоит в возникновении изображения периодического объекта на определённом расстоянии от него. Изображение появляется благодаря дифракции Френеля²⁾ при распространении света в свободном пространстве. В квантовой механике подобный эффект возникает при дифракции материальных волн: волновая функция свободной частицы с периодом d ($\psi(z) = \psi(z + d)$), в ходе дальнейшей эволюции в точности повторяет свою начальную форму во времена $t = nT_d$ ($n \in \mathbb{N}$), кратные времени Тальбо $T_d = 2\pi/\omega_d$, где частота Тальбо равна

$$\omega_d = \frac{\hbar}{2m_2} \left(\frac{2\pi}{d} \right)^2, \quad (\text{В.1})$$

¹⁾William Henry Fox Talbot, 1800-1877

²⁾Augustin-Jean Fresnel, 1788-1827

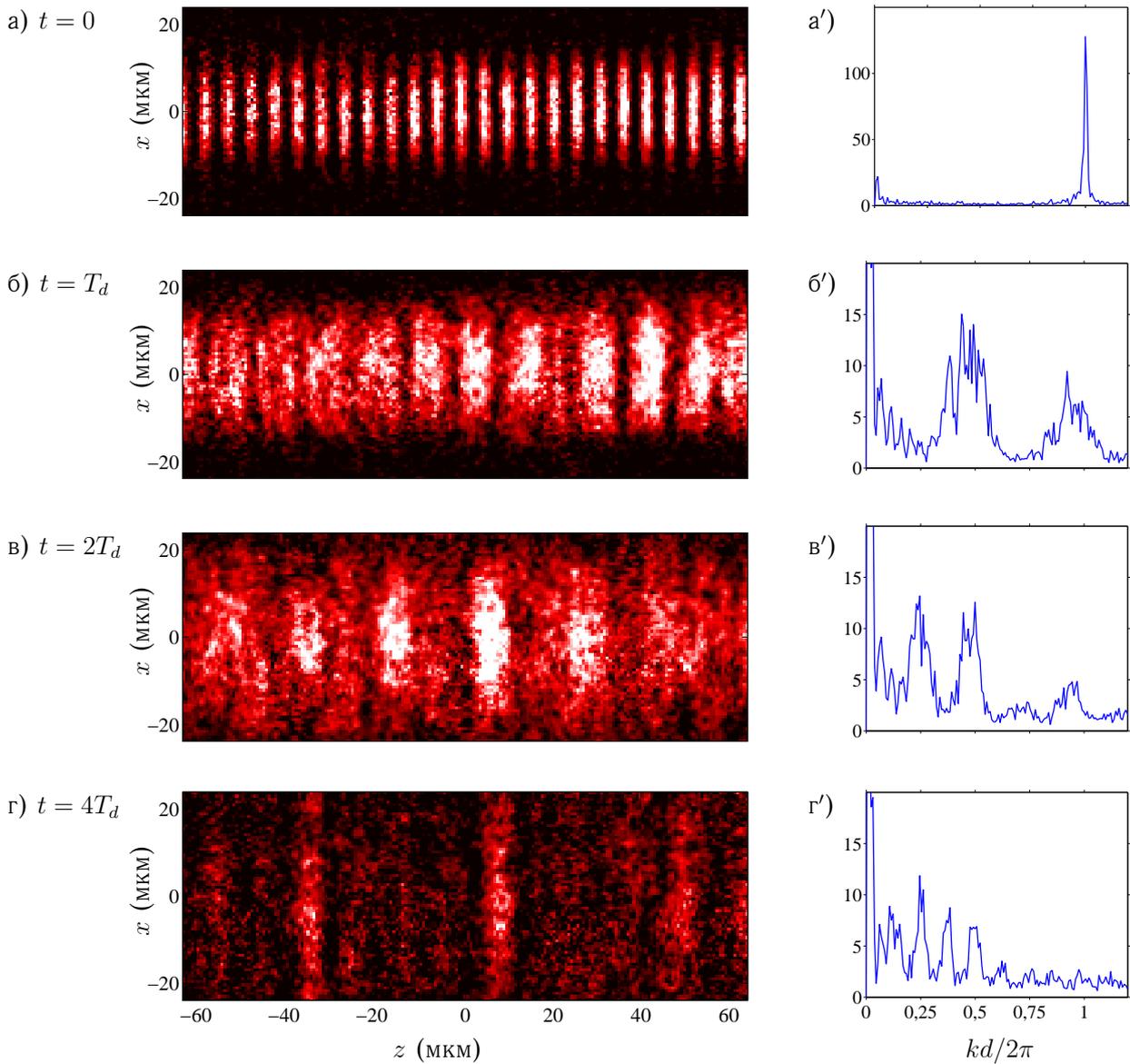


Рисунок В.1 — Интерференция БЭК, приготовленных в начальный момент со случайными фазами друг относительно друга. а)–г): снимки в моменты $t = 0$, $t = T_d$, $t = 2T_d$, $t = 4T_d$ соответственно. На каждом снимке можно видеть периодическое распределение плотности. Справа на рисунках а')–г') показаны фурье-образы распределения плотности вдоль z для тех же моментов времени. Рост периода со временем виден по появлению пиков на пониженных пространственных частотах.

а m_2 — масса частицы, в данном случае — молекулы Li_2 . Отличие начальных условий рассматриваемого эксперимента от канонического эффекта Тальбо состоит в том, что в нашем случае фазы конденсатов не равны друг другу, а наоборот являются случайными.

Обратимся к экспериментальному наблюдению эволюции и частичному сохранению порядка. Бозе-эйнштейновские конденсаты молекул Li_2 приготовлены в пучностях стоячей волны, как описано в разделе 3.1 на страницах 58–64. Молекулы образованы путём ассоциации равного числа атомов лития в состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Ассоциация проведена путём медленной перестройки магнитного поля B вблизи резонанса Фешбаха, лежащего при $B = 834$ Гс. Поле перестроено с фермиевской стороны ($B > 834$ Гс) на бозевскую ($B < 834$ Гс) до значения $B = 750$ Гс, где молекулы взаимодействуют с s -волновой длиной рассеяния $a_{\text{мол.}} = 0,6 a = 2100$ Бор. Стоячая волна образована фокусом двух встречных пе-

рекрывающихся лучей с длиной волны 10,6 мкм и одинаковой поляризацией. Источником лучей служит лазер на СО₂. Потенциалы всех ячеек, населённых конденсатами, можно считать идентичными ввиду большой релеевской длины лучей. В области, заполненной конденсатом, каждый потенциал близок к дископодобному гармоническому с частотами $\omega_{\perp}/2\pi = 35$ Гц и $\omega_z/2\pi = 1320$ Гц. В каждой ячейке находится примерно по 1000 молекул Li₂. Всего приготавливается около 30 таких конденсатов.

Цепочка облаков образована в ходе перегрузки газа из веретенообразной ловушки в стоячую волну. Из-за флуктуаций в разные пучности попадает чуть разное число частиц. Из-за этого конденсаты обладают чуть разными глобальными химическими потенциалами μ_j , где j — номер конденсата. За время между приготовлением изолированного БЭК и выпуском из потенциала эволюция волновой функцией j -го конденсата описывается фазовым множителем $e^{-i\mu_j t/\hbar}$. Если принять, что различия химических потенциалов конденсатов вызваны флуктуациями числа частиц $\sim \sqrt{N}$, то расфазировка на 2π наступает за 40 мс. Фактически между перегрузкой и выпуском конденсатов из потенциала проходит 6 с, что гарантирует случайность фаз конденсатов.

После быстрого отключения потенциала стоячей волны начинается разлёт и интерференция конденсатов в свободном пространстве. Наиболее заметна динамика системы в направлении z , в то время как движение в ортогональных направлениях медленное и для рассматриваемого эффекта не важно. Снимки системы в различные моменты эволюции $t > 0$ представлены на рисунках В.1б–г. На снимке В.1б, сделанном в момент времени Тальбо $T = T_d$, видно периодическое распределение плотности с периодом $2d$. Периодичность плотности присутствует, несмотря на беспорядочность начальных фаз. В условиях эффекта Тальбо, если бы начальные фазы были одинаковы, то при $t = T_d$ наблюдался бы пространственный период равный начальному d . В эксперименте видно удвоение периода. С ростом времени эволюции t пространственный период продолжает возрастать. При $t = 2T_d$ период составляет $4d$, а при $t = 4T_d$ равен $8d$, что видно на снимках В.1в и В.1г, соответственно. Рост пространственного периода и сохранение порядка в пространственном распределении также видны на фурье-образах распределения плотности вдоль z , показанных на рисунках В.1а'–г'. Удвоение пространственного периода видно по появлению пиков на пониженных пространственных частотах.

Наблюдения можно понять, моделируя эволюцию свободной частицы с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{p}_z^2/2m_2$ в одномерном пространстве. Волновую функцию при $t = 0$ зададим выражением:

$$\psi(z) \propto \sum_{j=1}^K e^{-(x-jd)^2/4\sigma^2} e^{i\varphi_j}, \quad (\text{B.2})$$

где φ_j — случайная фаза, K — число конденсатов, а начальный размер каждого конденсата σ удовлетворяет условию отсутствия перекрытия $\sigma \ll d$. Считаем, что значения фаз равномерно распределены по отрезку $[0, 2\pi]$. Можно рассчитать фурье-образ распределения плотности $\tilde{n}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} n(z) e^{-ikz} dz$. Наличие порядка видно при $K \rightarrow \infty$. В этом случае \tilde{n} принимает вид:

$$\tilde{n}(k) \propto \frac{2\pi}{d} \delta(k) + \frac{\sqrt{\pi K}}{2} e^{-k^2 \sigma^2/2} \sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} e^{-(j-kd/T_d\pi)^2 d^2/8\sigma^2} e^{i\varphi'_j}, \quad (\text{B.3})$$

где φ'_j — случайные фазы, удовлетворяющие условию $\varphi'_j = -\varphi'_{-j}$. Из-за условия $\sigma \ll d$ гауссовы функции в сумме (B.3) являются узкими пиками. Таким образом, в момент времени t плотность является суммой гармоник с волновыми векторами $k = j\pi T_d/t d$ ($j \in \mathbb{N}$). Отсюда следует, что распределение плотности периодически с периодом

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2t}{T_d}, \quad (\text{B.4})$$

то есть в распределении плотности присутствует порядок. Полученная периодичность согласуется с наблюдаемой в эксперименте.

Формула для фурье-образа плотности (В.3) справедлива на временах $t \gg T_d \sigma / d$. Это ограничение не является жёстким благодаря условию $\sigma \ll d$, а анализ верно описывает уже момент $t = T_d$ и более ранние.

Само по себе наличие интерференционной картины при случайных фазах неудивительно. Например для источников электромагнитного излучения с любыми определёнными фазами, в том числе случайными, электродинамика предсказывает существование интерференционной картины. Этой картиной можно управлять. На интерференции большого числа источников в зоне дифракции Фраунгофера³⁾ основана работа фазированных антенных решёток. Наблюдалась интерференция в зоне Фраунгофера от цепочки из конечного бозе-эйнштейновских конденсатов атомов [208]. Была видна интерференционная картина с контрастом, который кардинально отличается в разных повторениях эксперимента. Переменный контраст появляется из-за конечности системы.

В описанных здесь эксперименте и модели рассмотрена дифракция материальных волн в зоне Френеля. В рамках модели обнаружено наличие порядка в произвольный момент времени, кроме небольшого начального интервала. Более того, амплитуды гармоник плотности должны оставаться неизменными в разных повторениях эксперимента, что видно в уравнении (В.3). Наличие порядка и повторяемость являются следствиями бесконечности модельной системы в направлении z . Присутствие порядка в распределении плотности сначала было обнаружено в эксперименте с бозе-эйнштейновскими конденсатами молекул. После этого была построена модель.

³⁾Joseph Fraunhofer, 1787–1826

Литература

- 1 DeMarco B., Jin D. S. Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas // *Science*. 1999, Sep. Vol. 285. P. 1703. 6, 12, 13, 70
- 2 Baker George A. Neutron matter model // *Physical Review C*. 1999, Oct. Vol. 60, no. 5. P. 054311. 7, 9, 17
- 3 Heiselberg Henning. Fermi systems with long scattering lengths // *Physical Review A*. 2001, Mar. Vol. 63, no. 4. P. 043606. 7, 9, 17, 49, 97
- 4 Kolb P. F., Heinz U. Quark Gluon Plasma 3 / Ed. by R. C. Hwa, X. N. Wang. Singapore: World Scientific, 2004. P. 634. arXiv: nucl-th/0305084. 7, 17
- 5 BCS-BEC crossover: From high temperature superconductors to ultracold superfluids / Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, K. Levin // *Physics Reports*. 2005, Jun. Vol. 412. P. 1. 7, 17, 47, 48, 73, 133, 134
- 6 Evidence for superfluidity in a resonantly interacting Fermi gas / J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. 2004, Apr. Vol. 92, no. 15. P. 150402. 7, 9, 13, 109, 120
- 7 Kinast J., Turlapov A., Thomas J. E. Damping in a unitary Fermi gas // *Physical Review Letters*. 2005, May. Vol. 94. P. 170404. 7, 13, 48, 69, 120, 135, 136, 144
- 8 Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas / M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, W. Ketterle // *Nature*. 2005, Jun. Vol. 435. P. 1047. 7, 13, 135
- 9 Superfluid quenching of the moment of inertia in a strongly interacting Fermi gas / S. Riedl, E. R. Sánchez Guajardo, C. Kohstall, J. Hecker Denschlag, R. Grimm // *New Journal of Physics*. 2011. Vol. 13, no. 3. P. 035003. 7, 13
- 10 Superfluidity of spin-polarized ${}^6\text{Li}$ / H. T. C. Stoof, M. Houbiers, C. A. Sackett, R. G. Hulet // *Physical Review Letters*. 1996, Jan. Vol. 76, no. 1. P. 10–13. 8
- 11 Баранов М. А., Каган М. Ю., Каган Ю. О возможности сверхтекучего перехода в ферми-газе нейтральных частиц при сверхнизких температурах // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1996, авг. Т. 64. С. 273–276. 8
- 12 Superfluid state of atomic ${}^6\text{Li}$ in a magnetic trap / M. Houbiers, R. Ferwerda, H. T. C. Stoof, W. I. McAlexander, C. A. Sackett, R. G. Hulet // *Physical Review A*. 1997, Dec. Vol. 56, no. 6. P. 4864–4878. 8
- 13 Prospect of creating a composite Fermi-Bose superfluid / Eddy Timmermans, Kyoko Furuya, Peter W. Milonni, Arthur K. Kerman // *Physics Letters A*. 2001, Jul. Vol. 285, no. 3-4. P. 228 – 233. 8

- 14 Resonance superfluidity in a quantum degenerate Fermi gas / M. Holland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, M. L. Chiofalo, R. Walser // *Physical Review Letters*. 2001, Aug. Vol. 87, no. 12. P. 120406. **8**
- 15 Superconductivity up to 164 K in $\text{HgBa}_2\text{Ca}_{m-1}\text{Cu}_m\text{O}_{2m+2+\delta}$ ($m=1, 2, \text{ and } 3$) under quasihydrostatic pressures / L. Gao, Y. Y. Xue, F. Chen, Q. Xiong, R. L. Meng, D. Ramirez, C. W. Chu, J. H. Eggert, H. K. Mao // *Physical Review B*. 1994, Aug. Vol. 50, no. 6. P. 4260–4263. **8**
- 16 *Bozovic Ivan*. Effective dimensionality of cuprate superconductors // *Journal of Superconductivity*. 1991. Vol. 4. P. 193–197. **8**
- 17 *Schwenk Achim*. Superfluidity in neutron stars and cold atoms // *AIP Conference Proceedings*. 2007. Vol. 892, no. 1. P. 502–504. arXiv:nucl-th/0611046. <http://link.aip.org/link/?APC/892/502/1>. **8**
- 18 *Heiselberg Henning, Hjorth-Jensen Morten*. Phases of dense matter in neutron stars // *Physics Reports*. 2000. Vol. 328, no. 5-6. P. 237 – 327. **8**
- 19 Crossover from a molecular Bose-Einstein condensate to a degenerate Fermi gas / M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm // *Physical Review Letters*. 2004, Mar. Vol. 92, no. 12. P. 120401. **8, 13, 51, 97, 137, 138**
- 20 *Келдыш Н. В., Козлов А. Н.* Коллективные свойства экситонов в полупроводниках // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1968. Т. 54, вып. 3. С. 978–993. **8, 17, 51, 137**
- 21 *Kerbikov B.* Unusual condensates in quark and atomic systems // *Surveys in High Energy Physics*. 2006. Vol. 20. P. 47 – 57. arXiv:hep-ph/0510302. **8, 17, 51, 137**
- 22 Mechanical stability of a strongly interacting Fermi gas of atoms / M. E. Gehm, S. L. Hemmer, S. R. Granade, K. M. O'Hara, J. E. Thomas // *Physical Review A*. 2003, Jul. Vol. 68, no. 1. P. 011401(R). **9, 13, 50, 95, 97**
- 23 Tuning p -wave interactions in an ultracold Fermi gas of atoms / C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, D. S. Jin // *Physical Review Letters*. 2003, Feb. Vol. 90, no. 5. P. 053201. **10**
- 24 Feshbach resonances in fermionic ${}^6\text{Li}$ / C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, C. A. Stan, S. M. F. Raupach, W. Ketterle, A. Simoni, E. Tiesinga, C. J. Williams, P. S. Julienne // *Physical Review A*. 2005, Apr. Vol. 71, no. 4. P. 045601. **10, 96**
- 25 Fermionic superfluidity with imbalanced spin populations / M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, W. Ketterle // *Science*. 2006, Jan. Vol. 311. P. 492. **10**
- 26 Pairing and phase separation in a polarized Fermi gas / G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y. Liao, R. G. Hulet // *Science*. 2006, Jan. Vol. 311. P. 503. **10, 66, 97**
- 27 Collisional stability of a three-component degenerate Fermi gas / T. B. Ottenstein, T. Lompe, M. Kohnen, A. N. Wenz, S. Jochim // *Physical Review Letters*. 2008, Nov. Vol. 101, no. 20. P. 203202. **10, 13, 14**
- 28 *Bloch Immanuel, Dalibard Jean, Zwirger Wilhelm*. Many-body physics with ultracold gases // *Reviews of Modern Physics*. 2008, Jul. Vol. 80, no. 3. P. 885–964. **10**

- 29 Viability of nuclear α -particle condensates: A reply to N. T. Zinner and A. S. Jensen, arXiv:nucl/th0712.1191 / Y. Funaki, H. Horiuchi, G. Roepke, P. Schuck, A. Tohsaki, T. Yamada, W. von Oertzen. arXiv:0805.1526v2 [nucl-th]. 10
- 30 *Shuryak Edward*. Why does the quark-gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid? // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. 2004. Vol. 53, no. 1. P. 273 – 303. 10, 12, 141, 142
- 31 *Fulde Peter, Ferrell Richard A*. Superconductivity in a strong spin-exchange field // *Physical Review*. 1964, Aug. Vol. 135, no. 3A. P. A550–A563. 11, 18
- 32 *Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н.* Неоднородное состояние сверхпроводников // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1964, сен. Т. 47. С. 1136. 11, 18
- 33 *Sheehy Daniel E., Radzihovsky Leo*. BEC-BCS crossover in “magnetized” Feshbach-resonantly paired superfluids // *Physical Review Letters*. 2006, Feb. Vol. 96, no. 6. P. 060401. 11
- 34 *Samokhvalov A. V., Mel’nikov A. S., Buzdin A. I.* Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states and quantum oscillations in mesoscopic superconductors and superfluid ultracold Fermi gases // *Physical Review B*. 2010, Nov. Vol. 82, no. 17. P. 174514. 11
- 35 *Levinsen J., Cooper N. R., Gurarie V.* Stability of fermionic gases close to a p -wave Feshbach resonance // *Physical Review A*. 2008, Dec. Vol. 78, no. 6. P. 063616. 11, 18
- 36 Quantum computation using vortices and Majorana zero modes of a $p_x + ip_y$ superfluid of fermionic cold atoms / Sumanta Tewari, S. Das Sarma, Chetan Nayak, Chuanwei Zhang, P. Zoller // *Physical Review Letters*. 2007, Jan. Vol. 98. P. 010506. 11
- 37 High resolution polar Kerr effect measurements of Sr_2RuO_4 : Evidence for broken time-reversal symmetry in the superconducting state / Jing Xia, Yoshiteru Maeno, Peter T. Beyersdorf, M. M. Fejer, Aharon Kapitulnik // *Physical Review Letters*. 2006, Oct. Vol. 97, no. 16. P. 167002. 11
- 38 *Klinkhamer F. R., Volovik G. E.* Quantum phase transition for the BEC-BCS crossover in condensed matter physics and CPT violation in elementary particle physics // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2004, сен. Т. 80, вып. 5. С. 389. 11
- 39 Non-Abelian anyons and topological quantum computation / Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, Sankar Das Sarma // *Reviews of Modern Physics*. 2008, Sep. Vol. 80, no. 3. P. 1083–1159. 11
- 40 *Stern Ady*. Anyons and the quantum Hall effect—A pedagogical review // *Annals of Physics*. 2008. Vol. 323, no. 1. P. 204 – 249. 11
- 41 *Gurarie V., Radzihovsky L., Andreev A. V.* Quantum phase transitions across a p -wave Feshbach resonance // *Physical Review Letters*. 2005, Jun. Vol. 94, no. 23. P. 230403. 11, 18
- 42 *Tsuei C. C., Kirtley J. R.* Pairing symmetry in cuprate superconductors // *Reviews of Modern Physics*. 2000, Oct. Vol. 72, no. 4. P. 969. 11

- 43 *Копаев Ю. В., Белявский В. И., Капаев В. В.* С купратным багажом к комнатнотемпературной сверхпроводимости // *Успехи физических наук*. 2008. Т. 178, вып. 2. С. 202–210. **11, 85**
- 44 *Kovtun P. K., Son D. T., Starinets A. O.* Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics // *Physical Review Letters*. 2005, Mar. Vol. 94, no. 11. P. 111601. **11, 141, 145**
- 45 *Esslinger Tilman.* Fermi-Hubbard physics with atoms in an optical lattice // *Annual Review of Condensed Matter Physics*. 2010, May. Vol. 1. P. 129–152. **12**
- 46 All-optical production of a degenerate Fermi gas / S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O'Hara, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. 2002, Mar. Vol. 88, no. 12. P. 120405. **12, 13, 72**
- 47 Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms / K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas // *Science*. 2002, Nov. Vol. 298. P. 2179. **13, 81, 95, 97, 101, 108, 109**
- 48 Production of a Fermi gas of atoms in an optical lattice / G. Modugno, F. Ferlaino, R. Heidemann, G. Roati, M. Inguscio // *Physical Review A*. 2003, Jul. Vol. 68, no. 1. P. 011601. **13, 90, 91**
- 49 *Efimov V.* Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system // *Physics Letters B*. 1970, Dec. Vol. 33, no. 8. P. 563 – 564. **13**
- 50 *Bhaduri Rajat K., Chatterjee Arindam, van Zyl Brandon P.* An elementary exposition of the Efimov effect // *American Journal of Physics*. 2011, Mar. Vol. 79, no. 3. P. 274. **13, 46**
- 51 *Martiyanov Kirill, Makhalov Vasiliy, Turlapov Andrey.* Observation of a two-dimensional Fermi gas of atoms // *Physical Review Letters*. 2010, Jul. Vol. 105, no. 3. P. 030404. **13, 58, 64, 69, 85**
- 52 Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms / Andrew G. Truscott, Kevin E. Strecker, William I. McAlexander, Guthrie B. Partridge, Randall G. Hulet // *Science*. 2001, Mar. Vol. 291, no. 5513. P. 2570–2572. **13, 72**
- 53 Quasipure Bose-Einstein condensate immersed in a Fermi sea / F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, C. Salomon // *Physical Review Letters*. 2001, Aug. Vol. 87, no. 8. P. 080403. **13**
- 54 Two-species mixture of quantum degenerate Bose and Fermi gases / Z. Hadzibabic, C. A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M. W. Zwierlein, A. Görlitz, W. Ketterle // *Physical Review Letters*. 2002, Apr. Vol. 88, no. 16. P. 160401. **14**
- 55 Fermi-Bose quantum degenerate ^{40}K - ^{87}Rb mixture with attractive interaction / G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, M. Inguscio // *Physical Review Letters*. 2002, Sep. Vol. 89, no. 15. P. 150403. **14**
- 56 Bose-Einstein condensation of molecules / S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm // *Science*. 2003, Dec. Vol. 302. P. 2101. **14**

- 57 Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice: Observing Fermi surfaces, dynamics, and interactions / Michael Köhl, Henning Moritz, Thilo Stöferle, Kenneth Günter, Tilman Esslinger // *Physical Review Letters*. 2005, Mar. Vol. 94, no. 8. P. 080403. [14](#)
- 58 Quantum-degenerate mixture of fermionic lithium and bosonic rubidium gases / C. Silber, S. Günther, C. Marzok, B. Deh, Ph. W. Courteille, C. Zimmermann // *Physical Review Letters*. 2005, Oct. Vol. 95, no. 17. P. 170408. [14](#)
- 59 Degenerate Bose-Fermi mixture of metastable atoms / J. M. McNamara, T. Jelten, A. S. Tychkov, W. Hogervorst, W. Vassen // *Physical Review Letters*. 2006, Aug. Vol. 97, no. 8. P. 080404. [14](#), [24](#)
- 60 Degenerate Fermi gases of ytterbium / Takeshi Fukuhara, Yosuke Takasu, Mitsutaka Kumakura, Yoshiro Takahashi // *Physical Review Letters*. 2007, Jan. Vol. 98, no. 3. P. 030401. [14](#), [24](#)
- 61 Molecular Bose-Einstein condensation in a versatile low power crossed dipole trap / J. Fuchs, G. J. Duffy, G. Veeravalli, P. Dyke, M. Bartenstein, C. J. Vale, P. Hannaford, W. J. Rowlands // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2007, Oct. Vol. 40, no. 20. P. 4109. [14](#)
- 62 Collisional properties of p -wave Feshbach molecules / Yasuhisa Inada, Munekazu Horikoshi, Shuta Nakajima, Makoto Kuwata-Gonokami, Masahito Ueda, Takashi Mukaiyama // *Physical Review Letters*. 2008, Sep. Vol. 101, no. 10. P. 100401. [14](#)
- 63 Three-body recombination in a three-state Fermi gas with widely tunable interactions / J. H. Huckans, J. R. Williams, E. L. Hazlett, R. W. Stites, K. M. O'Hara // *Physical Review Letters*. 2009, Apr. Vol. 102, no. 16. P. 165302. [14](#)
- 64 Observation of Fermi polarons in a tunable Fermi liquid of ultracold atoms / André Schirotzek, Cheng-Hsun Wu, Ariel Sommer, Martin W. Zwierlein // *Physical Review Letters*. 2009, Jun. Vol. 102, no. 23. P. 230402. [14](#)
- 65 Мартынов К. А., Махалов В. Б., Турлапов А. В. Наблюдение вырожденного ферми-газа, пленённого стоячей электромагнитной волной // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2010, апр. Т. 91. С. 401–404. [14](#), [64](#)
- 66 Degenerate Fermi gas of ^{87}Sr / B. J. DeSalvo, M. Yan, P. G. Mickelson, Y. N. Martinez de Escobar, T. C. Killian // *Physical Review Letters*. 2010, Jul. Vol. 105, no. 3. P. 030402. [14](#), [24](#)
- 67 Radio-frequency spectroscopy of a strongly interacting two-dimensional Fermi gas / Bernd Fröhlich, Michael Feld, Enrico Vogt, Marco Koschorreck, Wilhelm Zwerger, Michael Köhl // *Physical Review Letters*. 2011, Mar. Vol. 106, no. 10. P. 105301. [14](#)
- 68 Quantum degenerate mixture of ytterbium and lithium atoms / Anders H. Hansen, Alexander Khramov, William H. Dowd, Alan O. Jamison, Vladyslav V. Ivanov, Subhadeep Gupta // *Physical Review A*. 2011, Jul. Vol. 84, no. 1. P. 011606. [15](#)
- 69 Measurement of the entropy and critical temperature of a strongly interacting Fermi gas / L. Luo, B. Clancy, J. Joseph, J. Kinast, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. 2007, Feb. Vol. 98, no. 8. P. 080402. [18](#), [70](#), [75](#), [76](#), [121](#), [136](#), [142](#), [143](#), [144](#)

- 70 Measurement of universal thermodynamic functions for a unitary Fermi gas / Munekazu Horikoshi, Shuta Nakajima, Masahito Ueda, Takashi Mukaiyama // *Science*. 2010, Jan. Vol. 327, no. 5964. P. 442–445. **18, 97, 135, 136**
- 71 *Regal Cindy*. Experimental realization of BCS-BEC crossover physics with a Fermi gas of atoms: Ph.D. thesis / University of Colorado. 2006. arXiv:cond-mat/0601054v1. **24**
- 72 Feshbach resonances in ultracold gases / Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, Eite Tiesinga // *Reviews of Modern Physics*. 2010, Apr. Vol. 82, no. 2. P. 1225–1286. **24, 39**
- 73 *Gehm Michael E*. Preparation of an optically-trapped degenerate Fermi gas of ${}^6\text{Li}$: Finding the route to degeneracy: Ph.D. thesis / Duke University. 2003. <http://www.phy.duke.edu/research/photon/qoptics/theses/pdf/Gehm.pdf>. **24, 60**
- 74 Elastic and inelastic collisions of ${}^6\text{Li}$ atoms in magnetic and optical traps / M. Houbiers, H. T. C. Stoof, W. I. McAlexander, R. G. Hulet // *Physical Review A*. 1998, Mar. Vol. 57, no. 3. P. R1497–R1500. **26**
- 75 Ultrastable CO_2 laser trapping of lithium fermions / K. M. O'Hara, S. R. Granade, M. E. Gehm, T. A. Savard, S. Bali, C. Freed, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. 1999, May. Vol. 82, no. 21. P. 4204–4207. **28**
- 76 Precise Stark-effect investigations of the lithium D_1 and D_2 lines / L. Windholz, M. Musso, G. Zerza, H. Jäger // *Physical Review A*. 1992, Nov. Vol. 46, no. 9. P. 5812–5818. **28**
- 77 *Derevianko A., Babb J. F., Dalgarno A*. High-precision calculations of van der Waals coefficients for heteronuclear alkali-metal dimers // *Physical Review A*. 2001, Apr. Vol. 63, no. 5. P. 052704. **34**
- 78 Ab initio determination of polarizabilities and van der Waals coefficients of Li atoms using the relativistic coupled-cluster method / L. W. Wansbeek, B. K. Sahoo, R. G. E. Timmermans, B. P. Das, D. Mukherjee // *Physical Review A*. 2008, Jul. Vol. 78, no. 1. P. 012515. **34**
- 79 Erratum: Ab initio determination of polarizabilities and van der Waals coefficients of Li atoms using the relativistic coupled-cluster method [Phys. Rev. A 78, 012515 (2008)] / L. W. Wansbeek, B. K. Sahoo, R. G. E. Timmermans, B. P. Das, D. Mukherjee // *Physical Review A*. 2010, Aug. Vol. 82, no. 2. P. 029901. **34**
- 80 *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). 5-е изд. Москва: Физматлит, 2002. Т. III из сер. *Теоретическая физика*. **35, 36, 39**
- 81 *Sakurai J. J.* Modern quantum mechanics / Ed. by San Fu Tuan. Revised edition. Addison-Wesley, 1993. **38, 39, 43**
- 82 *Duine R. A., Stoof H. T. C.* Atom-molecule coherence in Bose gases // *Physics Reports*. 2004. Vol. 396, no. 3. P. 115 – 195. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVP-4C6KV1T-2/2/c529ef4e34eff44b102065de88e3b158>. **39**
- 83 Precise determination of ${}^6\text{Li}$ cold collision parameters by radio-frequency spectroscopy on weakly bound molecules / M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, R. Geursen, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, A. Simoni, E. Tiesinga, C. J. Williams, P. S. Julienne // *Physical Review Letters*. 2005, Mar. Vol. 94, no. 10. P. 103201. **41, 42, 96**

- 84 Measurement of the zero crossing in a Feshbach resonance of fermionic ${}^6\text{Li}$ / K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, S. R. Granade, M. E. Gehm, J. E. Thomas, V. Venturi, E. Tiesinga, C. J. Williams // *Physical Review A*. 2002, Oct. Vol. 66, no. 4. P. 041401. 42, 63, 128
- 85 Strecker Kevin E., Partridge Guthrie B., Hulet Randall G. Conversion of an atomic Fermi gas to a long-lived molecular Bose gas // *Physical Review Letters*. 2003, Aug. Vol. 91, no. 8. P. 080406. 42
- 86 Observation of anomalous spin segregation in a trapped Fermi gas / X. Du, L. Luo, B. Clancy, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. 2008, Oct. Vol. 101, no. 15. P. 150401. 42, 63, 128
- 87 Krajewska K., Kamiński J. Z., Potuliege R. M. Stabilization of resonance states in crossed magnetic and laser fields in a parabolic quantum well // *Laser Physics*. 2005, Feb. Vol. 15, no. 2. P. 238–244. 44
- 88 O'Hara Kenneth M. Optical trapping and evaporative cooling of fermionic atoms: Ph.D. thesis / Duke University. 2000. <http://www.phy.duke.edu/research/photon/qoptics/theses/pdf/OHara.pdf>. 45
- 89 Du X., Zhang Y., Thomas J. E. Inelastic collisions of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover // *Physical Review Letters*. 2009, Jun. Vol. 102, no. 25. P. 250402. 46, 63, 90, 91
- 90 Горьков Л. П., Мелик-Бархударов Т. К. К теории сверхтекучести неидеального ферми-газа // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1961. Т. 40, вып. 5. С. 1452–1458. 47, 57, 125
- 91 Influence of induced interactions on the superfluid transition in dilute Fermi gases / H. Heiselberg, C. J. Pethick, H. Smith, L. Viverit // *Physical Review Letters*. 2000, Sep. Vol. 85, no. 12. P. 2418–2421. 47
- 92 Eagles D. M. Possible pairing without superconductivity at low carrier concentrations in bulk and thin-film superconducting semiconductors // *Physical Review*. 1969, Oct. Vol. 186, no. 2. P. 456–463. 47
- 93 Leggett A. J. // Modern trends in the theory of condensed matter / Ed. by A. Pekalski, R. Przystawa. Berlin: Springer-Verlag, 1980. Vol. 115 of *Lecture Notes in Physics*. P. 13–27. 47, 122
- 94 Nozières P., Schmitt-Rink S. Bose condensation in an attractive fermion gas: From weak to strong coupling superconductivity // *Journal of Low Temperature Physics*. 1985. Vol. 59. P. 195–211. 47, 48, 122, 140
- 95 Sá de Melo C. A. R., Randeria Mohit, Engelbrecht Jan R. Crossover from BCS to Bose superconductivity: Transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory // *Physical Review Letters*. 1993, Nov. Vol. 71, no. 19. P. 3202–3205. 47, 48
- 96 BCS-BEC crossover at finite temperature for superfluid trapped Fermi atoms / A. Perali, P. Pieri, L. Pisani, G. C. Strinati // *Physical Review Letters*. 2004, Jun. Vol. 92, no. 22. P. 220404. 48

- 97 Heat capacity of strongly-interacting Fermi gas / J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas, Q. Chen, J. Stajic, K. Levin // *Science*. 2005, Feb. Vol. 307. P. 1296. [48](#), [73](#), [74](#), [78](#), [95](#), [97](#), [103](#), [120](#), [129](#), [133](#), [134](#), [136](#)
- 98 *Bulgac Aurel, Drut Joaquín E., Magierski Piotr*. Spin 1/2 fermions in the unitary regime: A superfluid of a new type // *Physical Review Letters*. 2006, Mar. Vol. 96, no. 9. P. 090404. [48](#)
- 99 Critical temperature and thermodynamics of attractive fermions at unitarity / Evgeni Burovski, Nikolay Prokof'ev, Boris Svistunov, Matthias Troyer // *Physical Review Letters*. 2006, Apr. Vol. 96, no. 16. P. 160402. [48](#)
- 100 Thermodynamics of the BCS-BEC crossover / R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito, W. Zwerger // *Physical Review A*. 2007, Feb. Vol. 75, no. 2. P. 023610. [48](#)
- 101 *Nikolić Predrag, Sachdev Subir*. Renormalization-group fixed points, universal phase diagram, and $1/N$ expansion for quantum liquids with interactions near the unitarity limit // *Physical Review A*. 2007, Mar. Vol. 75, no. 3. P. 033608. [48](#)
- 102 *Nishida Yusuke*. Unitary Fermi gas at finite temperature in the ϵ expansion // *Physical Review A*. 2007, Jun. Vol. 75, no. 6. P. 063618. [48](#)
- 103 *Nishida Yusuke, Son Dam Thanh*. ϵ expansion for a Fermi gas at infinite scattering length // *Physical Review Letters*. 2006, Aug. Vol. 97, no. 5. P. 050403. [48](#)
- 104 *Nishida Yusuke, Son Dam Thanh*. Fermi gas near unitarity around four and two spatial dimensions // *Physical Review A*. 2007, Jun. Vol. 75, no. 6. P. 063617. [48](#)
- 105 *Akkineni Vamsi K., Ceperley D. M., Trivedi Nandini*. Pairing and superfluid properties of dilute fermion gases at unitarity // *Physical Review B*. 2007, Oct. Vol. 76, no. 16. P. 165116. [48](#)
- 106 *Ho Tin-Lun*. Universal thermodynamics of degenerate quantum gases in the unitarity limit // *Physical Review Letters*. 2004, Mar. Vol. 92, no. 9. P. 090402. [48](#), [49](#), [93](#), [98](#)
- 107 *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния / Ред. Л. П. Питаевский. 3-е изд. Москва: Физматлит, 2004. Т. IX из сер. *Теоретическая физика*. [52](#), [54](#)
- 108 *Tinkham Michael*. Introduction to superconductivity. 2nd edition. New York: McGraw-Hill, 1996. [54](#)
- 109 *Marini M., Pistoiesi F., Strinati G.C.* Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: analytic results for the crossover in three dimensions // *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*. 1998. Vol. 1. P. 151–159. [55](#), [56](#)
- 110 *Zwierlein Martin*. High-temperature superfluidity in an ultracold Fermi gas: Ph.D. thesis / Massachusetts Institute of Technology. 2006. http://cua.mit.edu/ketterle_group/Theses/Zwierlein_Thesis_Adobe7.pdf. [56](#)
- 111 *Petrov D. S., Salomon C., Shlyapnikov G. V.* Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms // *Physical Review Letters*. 2004, Aug. Vol. 93, no. 9. P. 090404. [56](#), [137](#), [140](#)
- 112 *Diener Roberto B., Ho Tin-Lun*. The condition for universality at resonance and direct measurement of pair wavefunctions using rf spectroscopy. arXiv:cond-mat/0405174. [57](#)

- 113 Zhang Wei, Lin G.-D., Duan L.-M. BCS-BEC crossover of a quasi-two-dimensional Fermi gas: The significance of dressed molecules // *Physical Review A*. 2008, Jun. Vol. 77, no. 6. P. 063613. 57
- 114 Kinast Joseph M. Thermodynamic and superfluidity of strongly interacting Fermi gas: Ph.D. thesis / Duke University. 2006. <http://www.phy.duke.edu/research/photon/qoptics/theses/pdf/Kinast.pdf>. 58, 151
- 115 Balykin V. I., Minogin V. G., Letokhov V. S. Electromagnetic trapping of cold atoms // *Reports on Progress in Physics*. 2000. Vol. 63, no. 9. P. 1429. 59, 62
- 116 Phillips William D., Metcalf Harold. Laser deceleration of an atomic beam // *Physical Review Letters*. 1982, Mar. Vol. 48, no. 9. P. 596–599. 60
- 117 Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure / E. L. Raab, M. Prentiss, Alex Cable, Steven Chu, D. E. Pritchard // *Physical Review Letters*. 1987, Dec. Vol. 59, no. 23. P. 2631–2634. 61, 62
- 118 Laser cooling and trapping of Li / Zhong Lin, Kazuko Shimizu, Mingsheng Zhan, Fujio Shimizu, Hiroshi Takuma // *Japanese Journal of Applied Physics*. 1991, Jun. Vol. 30, no. 7B. P. L1324–L1326. 62
- 119 Летохов В.С., Миногин В.Г., Павлик Б.Д. Охлаждение и пленение атомов резонансным световым полем // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1977, апр. Т. 72. С. 1328–1341. 62
- 120 Dalibard J., Cohen-Tannoudji C. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models // *Journal of the Optical Society of America B*. 1989, Nov. Vol. 6, no. 11. P. 2023–2045. 62
- 121 Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps / K. M. O'Hara, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas // *Physical Review A*. 2001, Oct. Vol. 64, no. 5. P. 051403. 64
- 122 Evaporative cooling of unitary Fermi gas mixtures in optical traps / L. Luo, B. Clancy, J. Joseph, J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas // *New Journal of Physics*. 2006, Sep. Vol. 8. P. 213. 64
- 123 Deformation of a trapped Fermi gas with unequal spin populations / G. B. Partridge, Wenhui Li, Y. A. Liao, R. G. Hulet, M. Haque, H. T. C. Stoof // *Physical Review Letters*. 2006, Nov. Vol. 97, no. 19. P. 190407. 66
- 124 Observation of phase separation in a strongly interacting imbalanced Fermi gas / Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, W. Ketterle // *Physical Review Letters*. 2006, Jul. Vol. 97, no. 3. P. 030401. 66
- 125 CO₂-laser optical lattice with cold rubidium atoms / S. Friebel, C. D'Andrea, J. Walz, M. Weitz, T. W. Hänsch // *Physical Review A*. 1998, Jan. Vol. 57, no. 1. P. R20–R23. 69, 70
- 126 Dynamics of noise-induced heating in atom traps / M. E. Gehm, K. M. O'Hara, T. A. Savard, J. E. Thomas // *Physical Review A*. 1998, Nov. Vol. 58, no. 5. P. 3914–3921. 70

- 127 Erratum: Dynamics of noise-induced heating in atom traps [Phys. Rev. A 58, 3914 (1998)] / M. E. Gehm, K. M. O'Hara, T. A. Savard, J. E. Thomas // *Physical Review A*. 2000, Jan. Vol. 61, no. 2. P. 029902. 70
- 128 DeMarco Brian. Quantum behavior of an atomic Fermi gas: Ph.D. thesis / University of Colorado. 2001. [http://jila.colorado.edu/~sim\\$jin/publications/pdf/2001_demarco.pdf](http://jila.colorado.edu/~sim$jin/publications/pdf/2001_demarco.pdf). 72
- 129 Observation of the pairing gap in a strongly interacting Fermi gas / C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, J. Hecker Denschlag, R. Grimm // *Science*. 2004, Aug. Vol. 305, no. 5687. P. 1128–1130. 74, 75
- 130 Путаевский Л. П. Конденсация Бозе–Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // *Успехи физических наук*. 1998, Июнь. Т. 168, вып. 6. С. 641–653. 74
- 131 Luo Le. Entropy and superfluid critical parameters of a strongly interacting Fermi gas: Ph.D. thesis / Duke University. 2008. <http://www.phy.duke.edu/research/photon/qoptics/theses/pdf/Luo.pdf>. 75
- 132 Direct observation of the superfluid phase transition in ultracold Fermi gases / Martin W. Zwierlein, Christian H. Schunck, André Schirotzek, Wolfgang Ketterle // *Nature*. 2006, Jul. Vol. 442. P. 54. 75
- 133 Thomas J. E., Kinast J., Turlapov A. Virial theorem and universality in a unitary Fermi gas // *Physical Review Letters*. 2005, Sep. Vol. 95, no. 12. P. 120402. 76, 104, 107
- 134 Pedri P., Guéry-Odelin D., Stringari S. Dynamics of a classical gas including dissipative and mean-field effects // *Physical Review A*. 2003, Oct. Vol. 68, no. 4. P. 043608. 78, 100, 110
- 135 Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate / M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, W. Ketterle // *Physical Review Letters*. 1997, Jul. Vol. 79, no. 4. P. 553–556. 79
- 136 Menotti C., Pedri P., Stringari S. Expansion of an interacting Fermi gas // *Physical Review Letters*. 2002, Dec. Vol. 89, no. 25. P. 250402. 81, 100
- 137 Ghosh Tarun Kanti, Machida Kazushige. Sound velocity and multibranch Bogoliubov spectrum of an elongated Fermi superfluid in the BEC-BCS crossover // *Physical Review A*. 2006, Jan. Vol. 73, no. 1. P. 013613. 81
- 138 Sound propagation in elongated superfluid fermionic clouds / P. Capuzzi, P. Vignolo, F. Federici, M. P. Tosi // *Physical Review A*. 2006, Feb. Vol. 73, no. 2. P. 021603. 81, 83, 138
- 139 Damski Bogdan. Formation of shock waves in a Bose-Einstein condensate // *Physical Review A*. 2004, Apr. Vol. 69, no. 4. P. 043610. 82
- 140 Equation of state of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover: A quantum Monte Carlo study / G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, Giorgini, S. // *Physical Review Letters*. 2004, Nov. Vol. 93, no. 20. P. 200404. 82, 83, 97, 137, 140
- 141 Астрахарчик Г. Е. Частная переписка. 82, 83, 140

- 142 *Joseph James A.* Precision measurement of the sound velocity in an ultracold Fermi gas in the BEC–BCS crossover: Ph.D. thesis / Duke University. 2010. <http://www.phy.duke.edu/research/photon/qoptics/theses/pdf/Joseph.pdf>. 83, 151
- 143 Measurement of sound velocity in a Fermi gas near a Feshbach resonance / J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov, J. E. Thomas // *Physical Review Letters*. 2007, Apr. Vol. 98, no. 17. P. 170401. 84, 97, 140
- 144 *Sachdev Sabir.* Quantum criticality: Competing ground states in low dimensions // *Science*. 2000, Apr. Vol. 288. P. 475. 85
- 145 *Коршунов С. Е.* Фазовые переходы в двумерных системах с непрерывным вырождением // *Успехи физических наук*. 2006, март. Т. 176. С. 233–274. 85
- 146 *Березинский В. Л.* Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1970. Т. 59. С. 907–920. 85
- 147 *Березинский В. Л.* Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах. Квантовый случай // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1971. Т. 61. С. 1144–1156. 85
- 148 *Березинский В. Л.* Низкотемпературные свойства двумерных систем с непрерывной группой симметрии. Москва: Физматлит, 2007. 85
- 149 *Kosterlitz J. M., Thouless D. J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1973, Apr. Vol. 6, no. 7. P. 1181–1203. 85
- 150 *Kosterlitz J. M.* The critical properties of the two-dimensional *xy* model // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1974, Mar. Vol. 7, no. 6. P. 1046–1060. 85
- 151 Bilayer ^3He : A simple two-dimensional heavy-fermion system with quantum criticality / Michael Neumann, Jan Nyeki, Brian Cowan, John Saunders // *Science*. 2007, Sep. Vol. 317. P. 1356. 85
- 152 Theory of superconductivity in strongly correlated electron systems / Yoichi Yanase, Takanobu Jujo, Takuji Nomura, Hiroaki Ikeda, Takashi Hotta, Kosaku Yamada // *Physics Reports*. 2003. Vol. 387, no. 1-4. P. 1 – 149. 85
- 153 *Shashkin Alexander, Kravchenko Sergey.* Understanding quantum phase transitions / Ed. by Lincoln D. Carr. Boca Raton: Taylor & Francis, 2010. arXiv:cond-mat/1002.2629. 85
- 154 *Эдельман В. С.* Левитирующие электроны // *Успехи физических наук*. 1980. Т. 130. С. 675. 85
- 155 *Kogan V. G.* Interaction of vortices in thin superconducting films and the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition // *Physical Review B*. 2007, Feb. Vol. 75, no. 6. P. 064514. 85
- 156 *Petrov D. S., Holzmann M., Shlyapnikov G. V.* Bose-Einstein condensation in quasi-2D trapped gases // *Physical Review Letters*. 2000, Mar. Vol. 84, no. 12. P. 2551–2555. 90

- 157 Pure gas of optically trapped molecules created from fermionic atoms / S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm // *Physical Review Letters*. 2003, Dec. Vol. 91, no. 24. P. 240402. 90, 91, 92
- 158 Atom interferometry with trapped Fermi gases / G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, M. Inguscio // *Physical Review Letters*. 2004, Jun. Vol. 92, no. 23. P. 230402. 90, 91, 92
- 159 p -wave interactions in low-dimensional fermionic gases / Kenneth Günter, Thilo Stöferle, Henning Moritz, Michael Köhl, Tilman Esslinger // *Physical Review Letters*. 2005, Nov. Vol. 95, no. 23. P. 230401. 90, 91
- 160 Confinement induced molecules in a 1D Fermi gas / Henning Moritz, Thilo Stöferle, Kenneth Günter, Michael Köhl, Tilman Esslinger // *Physical Review Letters*. 2005, Jun. Vol. 94, no. 21. P. 210401. 91
- 161 *Kestner J. P., Duan L.-M.* Conditions of low dimensionality for strongly interacting atoms under a transverse trap // *Physical Review A*. 2006, Nov. Vol. 74, no. 5. P. 053606. 91
- 162 Experimental study of the BEC-BCS crossover region in lithium 6 / T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, C. Salomon // *Physical Review Letters*. 2004, Jul. Vol. 93, no. 5. P. 050401. 96, 97, 138
- 163 Superfluid Fermi gases with large scattering length / J. Carlson, S.-Y. Chang, V. R. Pandharipande, K. E. Schmidt // *Physical Review Letters*. 2003, Jul. Vol. 91, no. 5. P. 050401. 97
- 164 *Perali A., Pieri P., Strinati G. C.* Quantitative comparison between theoretical predictions and experimental results for the BCS-BEC crossover // *Physical Review Letters*. 2004, Sep. Vol. 93, no. 10. P. 100404. 97, 137
- 165 Potential energy of a ^{40}K Fermi gas in the BCS-BEC crossover / J. T. Stewart, J. P. Gaebler, C. A. Regal, D. S. Jin // *Physical Review Letters*. 2006, Nov. Vol. 97. P. 220406. 97
- 166 *Боголюбов Н. Н.* К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт Р-1935 Объединённого института ядерных исследований. 1963. 99
- 167 *Боголюбов Н. Н.* / Ред. Е. Л. Орлик. Киев: Наукова думка, 1971. Т. III из сер. *Избранные труды в 3 томах*. С. 244–281. 99
- 168 *Боголюбов Н. Н.* Статистическая механика. Теория неидеального бозе-газа, сверхтекучести и сверхпроводимости 1946–1992 // Сборник научных трудов Н. Н. Боголюбова в 12 томах / Ред. А. В. Суханов. Москва: Наука, 2007. Т. 8. 99
- 169 *Kagan Yu., Surkov E. L., Shlyapnikov G. V.* Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential // *Physical Review A*. 1996, Sep. Vol. 54. P. R1753–R1756. 100
- 170 *Kagan Yu., Surkov E. L., Shlyapnikov G. V.* Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps // *Physical Review A*. 1997, Jan. Vol. 55. P. R18–R21. 100
- 171 *Ермаков В. П.* Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде // *Университетские известия (Киев)*. 1880. Vol. 20, no. 9. P. 1–25. 101

- 172 *Thomas J. E.* Energy measurement and virial theorem for confined universal Fermi gases // *Physical Review A*. 2008, Jul. Vol. 78, no. 1. P. 013630. 104
- 173 Collisions in zero temperature Fermi gases / Subhadeep Gupta, Zoran Hadzibabic, James R. Anglin, Wolfgang Ketterle // *Physical Review Letters*. 2004, Mar. Vol. 92. P. 100401. 109
- 174 *Regal C. A., Greiner M., Jin D. S.* Observation of resonance condensation of fermionic atom pairs // *Physical Review Letters*. 2004, Jan. Vol. 92. P. 040403. 109
- 175 *M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, W. Ketterle.* 2004, Mar. 109
- 176 *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика / Ред. Л. П. Питаевский. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2001. Т. X из сер. *Теоретическая физика*. 110, 111
- 177 *Manini N., Salasnich L.* Bulk and collective properties of a dilute Fermi gas in the BCS-BEC crossover // *Physical Review A*. 2005, Mar. Vol. 71, no. 3. P. 033625. 112, 137
- 178 Unitarity-limited elastic collision rate in a harmonically trapped Fermi gas / *M. E. Gehm, S. L. Hemmer, K. M. O'Hara, J. E. Thomas* // *Physical Review A*. 2003, Jul. Vol. 68, no. 1. P. 011603. 118
- 179 Is a gas of strongly interacting atomic fermions a nearly perfect fluid? / *A. Turlapov, J. Kinast, B. Clancy, Le Luo, J. Joseph, J. E. Thomas* // *Journal of Low Temperature Physics*. 2008, Feb. Vol. 150. P. 567–576. Published online 21 Nov. 2007. 120, 143
- 180 *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Часть 1 / Ред. Л. П. Питаевский. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2001. Т. V из сер. *Теоретическая физика*. 120
- 181 *Heiselberg H.* Collective Modes of Trapped Gases at the BEC-BCS Crossover // *Physical Review Letters*. 2004, Jul. Vol. 93, no. 4. P. 040402. 122
- 182 *Heiselberg Henning.* Pairing gaps in atomic gases at the BCS-BEC crossover // *New Journal of Physics*. 2004. Vol. 6, no. 1. P. 137. 122
- 183 Collective Modes and Ballistic Expansion of a Fermi Gas in the BCS-BEC Crossover / *Hui Hu, A. Minguzzi, Xia-Ji Liu, M. P. Tosi* // *Physical Review Letters*. 2004, Nov. Vol. 93, no. 19. P. 190403. 122, 138
- 184 *Kinast J., Turlapov A., Thomas J. E.* Breakdown of hydrodynamics in the radial breathing mode of a strongly interacting Fermi gas // *Physical Review A*. 2004, Nov. Vol. 70, no. 5. P. 051401. 126
- 185 Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover / *M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm* // *Physical Review Letters*. 2004, May. Vol. 92, no. 20. P. 203201. 126
- 186 Precision measurements of collective oscillations in the BEC-BCS crossover / *A. Altmeyer, S. Riedl, C. Kohstall, M. J. Wright, R. Geursen, M. Bartenstein, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm* // *Physical Review Letters*. 2007, Jan. Vol. 98, no. 4. P. 040401. 126

- 187 *Keesom W. H., Clusius K.* The specific heat of liquid helium // *Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam)*. 1932. Vol. 35. P. 307–320. **127**
- 188 *Butts D. A., Rokhsar D. S.* Trapped Fermi gases // *Physical Review A*. 1997, Jun. Vol. 55, no. 6. P. 4346–4350. **128**
- 189 *Chen Qijin, Levin K., Kosztin Ioan.* Superconducting phase coherence in the presence of a pseudogap: Relation to specific heat, tunneling, and vortex core spectroscopies // *Physical Review B*. 2001, Apr. Vol. 63, no. 18. P. 184519. **134**
- 190 *Ranninger J., Robin J. M.* Manifestations of the pseudogap in the boson-fermion model for Bose-Einstein-condensation-driven superconductivity // *Physical Review B*. 1996, May. Vol. 53, no. 18. P. R11961–R11963. **134**
- 191 *Chen Q., Levin K., Stajic J.* Applying BCS–BEC crossover theory to high-temperature superconductors and ultracold atomic Fermi gases (Review Article) // *Low Temp. Phys.* 2006, Apr-May. Vol. 32, no. 4-5. P. 406–423. **134**
- 192 Critical temperature and condensate fraction of a fermion pair condensate / Yasuhisa Inada, Munekazu Horikoshi, Shuta Nakajima, Makoto Kuwata-Gonokami, Masahito Ueda, Takashi Mukaiyama // *Phys. Rev. Lett.* 2008, Oct. Vol. 101. P. 180406. **135, 136**
- 193 Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas / S. Nascimbene, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon // *Nature*. 2010, Feb. Vol. 463. P. 1057. **136**
- 194 Evolution of the normal state of a strongly interacting Fermi gas from a pseudogap phase to a molecular Bose gas / A. Perali, F. Palestini, P. Pieri, G. C. Strinati, J. T. Stewart, J. P. Gaebler, T. E. Drake, D. S. Jin // *Physical Review Letters*. 2011, Feb. Vol. 106. P. 060402. **136**
- 195 *Bulgac Aurel, Bertsch George F.* Collective oscillations of a trapped Fermi gas near the unitary limit // *Physical Review Letters*. 2005, Feb. Vol. 94, no. 7. P. 070401. **137**
- 196 Momentum distribution of a Fermi gas of atoms in the BCS-BEC crossover / C. A. Regal, M. Greiner, S. Giorgini, M. Holland, D. S. Jin // *Physical Review Letters*. 2005, Dec. Vol. 95, no. 25. P. 250404. **138**
- 197 *Chiofalo M. L., Giorgini S., Holland M.* Released momentum distribution of a Fermi gas in the BCS-BEC crossover // *Physical Review Letters*. 2006, Aug. Vol. 97, no. 7. P. 070404. **138**
- 198 *Stajic Jelena, Chen Qijin, Levin K.* Density profiles of strongly interacting trapped Fermi gases // *Physical Review Letters*. 2005, Feb. Vol. 94, no. 6. P. 060401. **138**
- 199 Equation of state and collective frequencies of a trapped Fermi gas along the BEC-unitarity crossover / G. E. Astrakharchik, R. Combescot, X. Leyronas, S. Stringari // *Physical Review Letters*. 2005, Jul. Vol. 95, no. 3. P. 030404. **138**
- 200 *Heiselberg H.* Sound modes at the BCS-BEC crossover // *Physical Review A*. 2006, Jan. Vol. 73, no. 1. P. 013607. **140**
- 201 *Jackson A. D., Kavoulakis G. M., Pethick C. J.* Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms // *Physical Review A*. 1998, Sep. Vol. 58, no. 3. P. 2417–2422. **140**

- 202 Dark solitons in Bose-Einstein condensates / S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, M. Lewenstein // *Physical Review Letters*. 1999, Dec. Vol. 83, no. 25. P. 5198–5201. 140
- 203 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 4-е изд. Москва: Наука, 1988. Т. VI из сер. Теоретическая физика. 143
- 204 Schäfer T. Ratio of shear viscosity to entropy density for trapped fermions in the unitarity limit // *Physical Review A*. 2007, Dec. Vol. 76, no. 6. P. 063618. Препринт arXiv.org:cond-mat/0701251. 143, 144
- 205 Nagle J. L., Steinberg P., Zajc W. A. Quantitative and conceptual considerations for extracting the Knudsen number in heavy ion collisions // *Physical Review C*. 2010, Feb. Vol. 81, no. 2. P. 024901. 145
- 206 Bruun G. M., Smith H. Shear viscosity and damping for a Fermi gas in the unitarity limit // *Physical Review A*. 2007, Apr. Vol. 75, no. 4. P. 043612. 145
- 207 Talbot H. F. Facts related to optical science // *Philosophical Magazine*. 1836. Vol. 6. P. 401. 153
- 208 Interference of an array of independent Bose-Einstein condensates / Zoran Hadzibabic, Sabine Stock, Baptiste Battelier, Vincent Bretin, Jean Dalibard // *Physical Review Letters*. 2004, Oct. Vol. 93. P. 180403. 156